

AM110 – Induzione e disuguaglianze

Soluzioni sintetiche

1. Per $n = 4$, $3^4 = 81 > 64 = 4^3$. Supponiamo $3^n > n^3$ con $n \geq 4$. Allora

$$3^{n+1} > 3n^3.$$

Poiché, per $n \geq 4$,

$$3n^3 > (n+1)^3 \iff 3 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3,$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \leq \left(\frac{5}{4}\right)^3 < 3,$$

segue $3^{n+1} > (n+1)^3$.

2. Si verifica direttamente che

$$2^9 = 512 < 729 = 9^3, \quad 2^{10} = 1024 \geq 1000 = 10^3,$$

quindi il candidato minimo è $N = 10$. Supponiamo $2^n \geq n^3$ con $n \geq 10$. Allora

$$2^{n+1} \geq 2n^3.$$

Inoltre, per $n \geq 4$,

$$2n^3 \geq (n+1)^3 \iff 2 \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3,$$

e l'ultima disuguaglianza segue da

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \leq \left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2.$$

Dunque la proprietà vale per ogni $n \geq 10$ e $N = 10$ è il minimo.

3. Per $n = 4$, $4! = 24 \geq 16 = 4^2$. Supponiamo $n! \geq n^2$ con $n \geq 4$. Allora

$$(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)n^2.$$

Poiché $n^2 \geq n+1$ per $n \geq 2$, si ha

$$(n+1)n^2 \geq (n+1)^2.$$

4. Per $n = 1$ si ha $1! = 1 = 2^0$. Supponiamo $n! \geq 2^{n-1}$. Allora

$$(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n,$$

poiché $n+1 \geq 2$.

5. Si ha

$$6! = 720 < 729 = 3^6, \quad 7! = 5040 > 2187 = 3^7,$$

quindi il candidato minimo è $N = 7$. Supponiamo $n! > 3^n$ con $n \geq 7$. Allora

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)3^n > 3 \cdot 3^n = 3^{n+1},$$

perché $n+1 > 3$. Dunque $N = 7$ è il minimo.

6. Per $n = 7$,

$$H_7 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{363}{140} < \sqrt{7}.$$

Supponiamo $H_n \leq \sqrt{n}$ con $n \geq 7$. Allora

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} \leq \sqrt{n} + \frac{1}{n+1}.$$

Basta verificare

$$\frac{1}{n+1} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Ciò equivale a

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq n+1,$$

che vale, ad esempio, perché

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1} \leq n+1$$

per $n+1 \geq 4$.

7. Poniamo $S_n := 1^2 + \dots + n^2$. Per $n = 1$,

$$\frac{1}{3} \leq 1 \leq 1.$$

Supponiamo

$$\frac{1}{3}n^3 \leq S_n \leq n^3.$$

Per la stima inferiore,

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 \geq \frac{1}{3}n^3 + (n+1)^2 \geq \frac{1}{3}(n+1)^3,$$

poiché

$$n^3 + 3(n+1)^2 - (n+1)^3 = 3n + 2 > 0.$$

Per la stima superiore,

$$S_{n+1} \leq n^3 + (n+1)^2 \leq (n+1)^3,$$

poiché

$$(n+1)^3 - n^3 - (n+1)^2 = 2n^2 + n \geq 0.$$

8. Per $n = 2$ si ha l'uguaglianza

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Supponiamo la disuguaglianza vera per un certo $n \geq 2$. Poiché $1+x \geq 0$,

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geq \left(1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2\right)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 \\ &\geq 1 + (n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}x^2, \end{aligned}$$

perché $x \geq 0$.

9. Per $n = 1$ si ha l'uguaglianza. Supponiamo

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Allora

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Basta mostrare che

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

che equivale a

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1},$$

ovvia.

10. Per $n = 1$ si ha l'uguaglianza. Supponiamo

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Allora

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ora

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)},$$

poiché $n \leq n+1$. Pertanto

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}.$$