AM110 – Limiti di successioni e limiti infiniti

Convenzioni. Si usino direttamente le definizioni: per $a_n \to L$, dato $\varepsilon > 0$ si trovi N tale che $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$; per $f(x) \to +\infty$ quando $x \to x_0$, dato $M > 0$ si trovi $\delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Nei casi negativi si proceda per assurdo.

1. Per ciascuna delle seguenti successioni, stabilire se esiste un limite finito; in caso affermativo determinarlo e dimostrarlo mediante la definizione, altrimenti dimostrarne la non esistenza.

(i) $a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$.

(ii) $a_n = \dfrac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + 5}$.

(iii) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^3+2}$.

(iv) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$.

(v) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

(vi) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$.

(vii) $a_n = \dfrac{n^{3/2}+1}{n^{3/2}+n}$.

(viii) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

(ix) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

(x) $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n+1}$.

(xi) $a_n = (-1)^n$.

(xii) $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$.

(xiii) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$.

(xiv) $a_n = \dfrac{n + (-1)^n n}{n+1}$.

2. Usando direttamente la definizione, dimostrare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ nei seguenti casi:

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad x_0 = 0.$

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}, \quad x_0 = 1.$

(iii) $f(x) = \dfrac{1+|x|}{x^2}, \quad x_0 = 0.$

(iv) $f(x) = \dfrac{3+x^2}{(x-2)^2}, \quad x_0 = 2.$

(v) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, \quad x_0 = 0.$

(vi) $f(x) = \dfrac{2 - |x|}{x^2}, \quad x_0 = 0.$

(vii) $f(x) = \dfrac{1}{|\sqrt{x} - 1|}, \quad x_0 = 1$ (per $x \geq 0$, $x \neq 1$).

3*. Nei seguenti casi stabilire se il limite finito indicato esiste, oppure se la funzione tende a $+\infty$, secondo quanto richiesto. Giustificare ogni risposta direttamente dalla definizione.

(i) $a_n = \begin{cases} 1, & n = m^2 \text{ per qualche } m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{altrimenti;} \end{cases}$ stabilire se a_n converge.

(ii) $a_n = \begin{cases} 1/\sqrt{n}, & n = m^2 \text{ per qualche } m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{altrimenti;} \end{cases}$ stabilire se a_n converge.

(iii) $a_n = \{\sqrt{n}\}$; stabilire se a_n converge.

(iv) $a_n = \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}}$; stabilire se a_n converge.

(v) $f(x) = \dfrac{\chi_{\mathbb{Q}}(x)}{|x|}$ $(x \neq 0)$; stabilire se $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0$.

(vi) Posto $A = \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, sia $f(x) = \dfrac{\chi_A(x)}{|x|}$ $(x \neq 0)$. Stabilire se $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0$.

(vii) Per $a_n = 1/\sqrt{n}$, calcolare il minimo $N \in \mathbb{N}$ tale che $n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$, in funzione di $\varepsilon > 0$.