

AM110 – Limiti di successioni e limiti infiniti

Convenzioni. Si usino direttamente le definizioni: per $a_n \rightarrow L$, dato $\varepsilon > 0$ si trovi N tale che $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$; per $f(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow x_0$, dato $M > 0$ si trovi $\delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Nei casi negativi si proceda per assurdo.

1. Si possono usare le seguenti stime e scelte sufficienti di N (sempre $n > N$):

- (i) $|a_n - 2| = 5/(n + 3) < 5/n$: $N \geq 5/\varepsilon$.
- (ii) $|a_n - 3/2| = |-2n - 13|/(4n^2 + 10) \leq 15/(4n)$ per $n \geq 1$: $N \geq 15/(4\varepsilon)$.
- (iii) $0 < a_n \leq 2/n$ per $n \geq 1$: $N \geq 2/\varepsilon$.
- (iv) $0 < a_n \leq 1/\sqrt{n}$: $N \geq \varepsilon^{-2}$.
- (v) $0 < 1 - a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}(\sqrt{n^2+1}+n)} \leq 1/(2n^2)$: $N \geq (2\varepsilon)^{-1/2}$.
- (vi) $a_n - 1 = \frac{1/n}{\sqrt{1+1/n+1}} \leq 1/(2n)$: $N \geq 1/(2\varepsilon)$.
- (vii) $|a_n - 1| = \frac{n-1}{n^{3/2}+n} \leq 1/\sqrt{n}$: $N \geq \varepsilon^{-2}$.
- (viii) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n+1}}$ e $|a_n - 1/2| \leq 1/(8n)$: $N \geq 1/(8\varepsilon)$.
- (ix) $|a_n| = 1/\sqrt{n}$: $N \geq \varepsilon^{-2}$.
- (x) $|a_n - 1| = |(-1)^n - 1|/(n + 1) \leq 2/n$: $N \geq 2/\varepsilon$.
- (xi) Non converge: termini pari 1 e dispari -1 arbitrariamente avanti; con $\varepsilon = 1/2$ un eventuale L dovrebbe distare meno di $1/2$ da entrambi.
- (xii) Non converge: per n pari e dispari grandi, i valori sono rispettivamente vicini a 1 e -1 . Con $\varepsilon = 1/4$, scegliere n abbastanza grande che $1/n < 1/4$: i due valori distano più di $3/2$, assurdo.
- (xiii) Non converge: valori pari 1 e dispari 0; usare $\varepsilon = 1/3$.
- (xiv) Non converge: per n dispari vale 0, per n pari vale $2n/(n+1) > 1$ se $n > 1$; usare $\varepsilon = 1/3$.

2. Dato $M > 0$, le seguenti scelte di δ sono sufficienti:

- (i) $\delta = M^{-1/2}$.
- (ii) $\delta = M^{-1/2}$.
- (iii) $\delta = M^{-1/2}$, poiché $1 + |x| \geq 1$.
- (iv) $\delta = \sqrt{3/M}$, poiché $3 + x^2 \geq 3$.
- (v) $\delta = M^{-2}$.
- (vi) $\delta = \min\{1, M^{-1/2}\}$: per $|x| < 1$, $2 - |x| > 1$.
- (vii) $\delta = \min\{1, M^{-1}\}$: per $|x - 1| < 1$, $x > 0$ e $|\sqrt{x} - 1| = |x - 1|/(\sqrt{x} + 1) \leq |x - 1|$.

- 3*.**
- (i) Non converge: i quadrati m^2 e i numeri $m^2 + 1$ (per $m \geq 2$) danno rispettivamente 1 e 0 arbitrariamente avanti; usare $\varepsilon = 1/3$.
 - (ii) Converge a 0: $0 \leq a_n \leq 1/\sqrt{n}$, dunque $N \geq \varepsilon^{-2}$.
 - (iii) Non converge. Per $n = m^2$, $a_n = 0$; per $n = m^2 + m$, si ha $\sqrt{m^2 + m} \in (m, m + 1)$ e $\{\sqrt{m^2 + m}\} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + m} + m} > \frac{1}{\sqrt{2} + 1} > 1/3$. Le due famiglie di indici sono arbitrariamente grandi; usare $\varepsilon = 1/6$.

- (iv) Converge a 0: $|a_n| = 1/\sqrt{n}$, quindi $N \geq \varepsilon^{-2}$.
- (v) Non tende a $+\infty$: per ogni $\delta > 0$ esiste un irrazionale x con $0 < |x| < \delta$ e $f(x) = 0$, che contraddice la definizione con $M = 1$.
- (vi) Non tende a $+\infty$: per ogni $\delta > 0$ esiste $x < 0$ con $|x| < \delta$; allora $x \notin A$ e $f(x) = 0$ (prendere $M = 1$).
- (vii) La condizione equivale a $n > \varepsilon^{-2}$. Se $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, il minimo è $\max\{1, \lfloor \varepsilon^{-2} \rfloor\}$. Infatti per $N = \lfloor \varepsilon^{-2} \rfloor$ tutti gli interi $n > N$ soddisfano la disuguaglianza, mentre un N inferiore (se ammesso) non basta.