

AM110 – Punti interni, isolati e di accumulazione

Definizioni. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Un punto $x \in A$ si dice *punto interno* di A se esiste un intorno U di x tale che $U \subseteq A$. L'insieme dei punti interni di A si denota con A° e si chiama *interno* di A .
- Un punto $x \in A$ si dice *punto isolato* di A se esiste un intorno U di x tale che $U \cap A = \{x\}$. L'insieme dei punti isolati di A si denota con $\mathcal{I}A$.
- Un punto $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si dice *punto di accumulazione* (o *punto limite*) per A se per ogni intorno U di x si ha

$$(U \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

L'insieme dei punti di accumulazione di A si chiama *derivato esteso* di A e si denota con $\mathcal{D}^*A$; l'insieme dei punti di accumulazione finiti si chiama *derivato* di A e si denota con

$$\mathcal{D}A := \mathcal{D}^*A \cap \mathbb{R}.$$

In particolare,

$$+\infty \in \mathcal{D}^*A \iff A \text{ non è limitato superiormente}, \quad -\infty \in \mathcal{D}^*A \iff A \text{ non è limitato inferiormente}.$$

1. Per ciascuno dei seguenti insiemi A determinare

$$A^\circ, \quad \mathcal{I}A, \quad \mathcal{D}A, \quad \mathcal{D}^*A,$$

giustificando le risposte direttamente dalle definizioni.

- (i) $A = (-1, 0] \cup \{2\}$.
- (ii) $A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
- (iii) $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
- (iv) $A = (0, 1) \cup \left\{2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
- (v) $A = [0, 1] \cup \{2, 3, 4, \dots\}$.
- (vi) $A = \left\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
- (vii) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(n, n + \frac{1}{2}\right)$.
- (viii) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$.

2. Per ciascuno dei seguenti insiemi determinare ancora A° , $\mathcal{I}A$, $\mathcal{D}A$ e $\mathcal{D}^*A$. In questi casi si richiede anche di giustificare esplicitamente che non vi sono altri punti di accumulazione oltre a quelli trovati.

- (i) $A = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$.
- (ii) $A = f(\mathbb{R})$, dove

$$f(x) = x + \frac{1}{1+x^2}.$$

Si determini anzitutto l'insieme $f(\mathbb{R})$ senza usare risultati sulla continuità.

(iii) $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, dove

$$a_n = \frac{n}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n}.$$

(iv) $A = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, dove

$$b_n = n + \frac{(-1)^n}{n}.$$

(v) $A = g(\mathbb{R})$, dove

$$g(x) = |x - 1| + 2.$$

3*. (i) Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrare direttamente dalla definizione che

$$\mathcal{D}^*(A \cup B) = \mathcal{D}^*A \cup \mathcal{D}^*B.$$

(ii) Costruire un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$E^\circ = \emptyset, \quad \mathcal{I}E \neq \emptyset, \quad \mathcal{D}E = \{0, 1, 2\}, \quad \mathcal{D}^*E = \{0, 1, 2, +\infty\}.$$

Giustificare che l'insieme costruito ha esattamente le proprietà richieste.

(iii) Costruire un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{D}E = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}, \quad +\infty \in \mathcal{D}^*E,$$

e tale che ogni punto di $E \setminus \mathcal{D}E$ sia isolato. Anche in questo caso si deve dimostrare che non vi sono altri punti di accumulazione finiti.