

AM110 – Punti interni, isolati e di accumulazione

Soluzioni

1. (i) $A = (-1, 0] \cup \{2\}$. Si ha

$$A^\circ = (-1, 0), \quad \mathcal{I}A = \{2\}, \quad \mathcal{D}A = [-1, 0], \quad \mathcal{D}^*A = [-1, 0].$$

Infatti ogni punto di $(-1, 0)$ è interno; 2 è isolato; i punti di $[-1, 0]$ sono tutti di accumulazione e nessun altro punto reale lo è. L'insieme è limitato.

- (ii) $A = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Si ha

$$A^\circ = \emptyset, \quad \mathcal{I}A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \mathcal{D}A = \{0\}, \quad \mathcal{D}^*A = \{0\}.$$

Ogni $1/n$ è isolato, mentre ogni intorno di 0 contiene $1/n$ per n sufficientemente grande.

- (iii) $A = \{(-1)^n + 1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Per $n = 2k$ i punti sono $1 + 1/(2k) \rightarrow 1$, mentre per $n = 2k + 1$ sono $-1 + 1/(2k + 1) \rightarrow -1$. Le due famiglie stanno rispettivamente sopra 1 e sopra -1 e, in ciascuna famiglia, i punti sono distinti. Pertanto

$$A^\circ = \emptyset, \quad \mathcal{I}A = A, \quad \mathcal{D}A = \{-1, 1\}, \quad \mathcal{D}^*A = \{-1, 1\}.$$

- (iv) $A = (0, 1) \cup \{2 + 1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Si ha

$$A^\circ = (0, 1), \quad \mathcal{I}A = \left\{ 2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\mathcal{D}A = [0, 1] \cup \{2\}, \quad \mathcal{D}^*A = [0, 1] \cup \{2\}.$$

L'unico nuovo punto di accumulazione prodotto dalla successione $2 + 1/n$ è 2.

- (v) $A = [0, 1] \cup \{2, 3, 4, \dots\}$. Si ha

$$A^\circ = (0, 1), \quad \mathcal{I}A = \{2, 3, 4, \dots\}, \quad \mathcal{D}A = [0, 1],$$

$$\mathcal{D}^*A = [0, 1] \cup \{+\infty\}.$$

Gli interi ≥ 2 sono isolati e l'insieme non è limitato superiormente.

- (vi) $A = \{n + 1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Poiché

$$\left(n + 1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(n + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n(n+1)} > 0,$$

i punti sono strettamente crescenti e tendono a $+\infty$. Dunque

$$A^\circ = \emptyset, \quad \mathcal{I}A = A, \quad \mathcal{D}A = \emptyset, \quad \mathcal{D}^*A = \{+\infty\}.$$

- (vii) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n + 1/2)$. Essendo unione di intervalli aperti,

$$A^\circ = A, \quad \mathcal{I}A = \emptyset.$$

Ogni estremo n e $n + 1/2$ è di accumulazione e nei vuoti tra due intervalli non ve ne sono. Quindi

$$\mathcal{D}A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[n, n + \frac{1}{2} \right], \quad \mathcal{D}^*A = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[n, n + \frac{1}{2} \right] \right) \cup \{+\infty\}.$$

- (viii) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (1/(n+1), 1/n)$. Gli intervalli riempiono $(0, 1)$ tranne i punti $1/n$ con $n \geq 2$; in particolare A è aperto. Ogni punto di $[0, 1]$ è di accumulazione: per 0 si usano punti degli intervalli con n grande, per 1 punti di $(1/2, 1)$, e per $1/n$ punti degli intervalli adiacenti. Pertanto

$$A^\circ = A, \quad \mathcal{I}A = \emptyset, \quad \mathcal{D}A = [0, 1], \quad \mathcal{D}^*A = [0, 1].$$

2. (i) Sia

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Per $m \rightarrow \infty$, a n fissato, si ottiene $1/n$ come punto di accumulazione; facendo tendere entrambi gli indici a $+\infty$ si ottiene 0. Quindi

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathcal{D}A.$$

Non vi sono altri punti di accumulazione. Infatti, se una successione di punti distinti

$$x_j = \frac{1}{n_j} + \frac{1}{m_j} \in A$$

converge a $x > 0$, non possono essere entrambi $n_j, m_j \rightarrow \infty$. Dunque, passando eventualmente a una sottosuccessione e scambiando gli indici, possiamo supporre $n_j = n$ costante. Se anche m_j rimanesse limitato, i valori possibili sarebbero finiti e non potrebbero formare una successione di punti distinti convergente; quindi $m_j \rightarrow \infty$ e $x = 1/n$.

Inoltre $A \subset \mathbb{Q}$, dunque $A^\circ = \emptyset$. I punti $1/n$ appartengono effettivamente ad A , perché

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}.$$

Essi non sono isolati, mentre ogni altro punto di A lo è. Pertanto

$$A^\circ = \emptyset, \quad \mathcal{I}A = A \setminus \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\mathcal{D}A = \mathcal{D}^*A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- (ii) Sia $f(x) = x + 1/(1+x^2)$. Mostriamo anzitutto che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ senza usare la continuità.

Se $x < y$, allora

$$f(y) - f(x) = (y - x) \left(1 - \frac{x + y}{(1+x^2)(1+y^2)} \right).$$

Ora

$$(1+x^2)(1+y^2) - (x+y) = (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + x^2y^2 + \frac{1}{2} > 0,$$

quindi f è strettamente crescente.

Fissiamo $c \in \mathbb{R}$ e poniamo

$$E_c := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < c\}.$$

Poiché $x < f(x) \leq x + 1$, si ha $c - 2 \in E_c$ e ogni $x \in E_c$ soddisfa $x < c$; dunque E_c è non vuoto e limitato superiormente. Sia $s = \sup E_c$.

Mostriamo che $f(s) = c$. Per $|x - s| < 1$,

$$|f(x) - f(s)| \leq |x - s| + \frac{|x - s||x + s|}{(1+x^2)(1+s^2)} \leq C_s |x - s|$$

con, ad esempio, $C_s = 1 + (2|s| + 1)/(1 + s^2)$. Se $f(s) < c$, scegliendo $x > s$ sufficientemente vicino a s avremmo ancora $f(x) < c$, contro la definizione di s . Se $f(s) > c$, scegliendo $x < s$ sufficientemente vicino a s avremmo $f(x) > c$; essendo f crescente, allora $f(y) > c$ per ogni $y \geq x$, e quindi $\sup E_c \leq x < s$, assurdo. Dunque $f(s) = c$.

Pertanto $A = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, e quindi

$$A^\circ = \mathbb{R}, \quad \mathcal{I}A = \emptyset, \quad \mathcal{D}A = \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}^*A = \mathbb{R}^*.$$

(iii) Scriviamo separatamente gli indici pari e dispari. Se n è pari,

$$a_n = 1 + \frac{1}{n(n+1)} > 1,$$

mentre se n è dispari,

$$a_n = 1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) < 1.$$

La prima famiglia decresce a 1, la seconda cresce a 1. Tutti i punti sono distinti e $1 \notin A$. Quindi

$$A^\circ = \emptyset, \quad \mathcal{I}A = A, \quad \mathcal{D}A = \{1\}, \quad \mathcal{D}^*A = \{1\}.$$

(iv) Per $b_n = n + (-1)^n/n$ si ha

$$b_{n+1} - b_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} > 0$$

(per n pari il minimo è già $1 - 1/n - 1/(n+1) > 0$ per $n \geq 2$, mentre per n dispari è ovvio; il caso $n = 1$ si controlla direttamente). Quindi b_n è strettamente crescente e $b_n \rightarrow +\infty$. Ne segue

$$A^\circ = \emptyset, \quad \mathcal{I}A = A, \quad \mathcal{D}A = \emptyset, \quad \mathcal{D}^*A = \{+\infty\}.$$

(v) Per $g(x) = |x-1|+2$ si ha immediatamente $g(x) \geq 2$ e, dato $y \geq 2$, scegliendo $x = 1 + (y-2)$ si ottiene $g(x) = y$. Dunque

$$A = g(\mathbb{R}) = [2, +\infty).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} A^\circ &= (2, +\infty), & \mathcal{I}A &= \emptyset, \\ \mathcal{D}A &= [2, +\infty), & \mathcal{D}^*A &= [2, +\infty) \cup \{+\infty\}. \end{aligned}$$

3*. (i) Se $x \in \mathcal{D}^*A \cup \mathcal{D}^*B$, ogni intorno di x contiene un punto di A oppure di B diverso da x , dunque $x \in \mathcal{D}^*(A \cup B)$. Quindi

$$\mathcal{D}^*A \cup \mathcal{D}^*B \subseteq \mathcal{D}^*(A \cup B).$$

Viceversa, supponiamo $x \notin \mathcal{D}^*A \cup \mathcal{D}^*B$. Esistono allora due intorni U, V di x tali che

$$(U \cap A) \setminus \{x\} = \emptyset, \quad (V \cap B) \setminus \{x\} = \emptyset.$$

Poiché $U \cap V$ è ancora un intorno di x ,

$$((U \cap V) \cap (A \cup B)) \setminus \{x\} = \emptyset,$$

perciò $x \notin \mathcal{D}^*(A \cup B)$. Questo prova l'altra inclusione.

(ii) Un esempio è

$$E = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{4, 5, 6, \dots\}.$$

Le prime tre famiglie hanno rispettivamente come unici punti di accumulazione $0, 1, 2$; l'ultima famiglia non ha punti di accumulazione finiti e rende E non limitato superiormente. Le famiglie sono separate salvo eventuali coincidenze di singoli punti, che non producono nuovi punti di accumulazione. Quindi

$$\mathcal{D}E = \{0, 1, 2\}, \quad \mathcal{D}^*E = \{0, 1, 2, +\infty\}.$$

Inoltre $E^\circ = \emptyset$ e, per esempio, 4 (così come infiniti altri punti di E) è isolato; dunque $\mathcal{I}E \neq \emptyset$.

(iii) Poniamo, per $n, m \in \mathbb{N}$,

$$c_{n,m} := \frac{1}{n} + \frac{1}{3n(n+1)m}$$

e definiamo

$$E := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{c_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{3, 4, 5, \dots\}.$$

Per ogni n fissato,

$$c_{n,m} \longrightarrow \frac{1}{n} \quad (m \rightarrow \infty),$$

quindi ogni $1/n$ appartiene a $\mathcal{DE}$. Inoltre $1/n \rightarrow 0$, perciò $0 \in \mathcal{DE}$.

Mostriamo che non vi sono altri punti di accumulazione finiti. Per ogni n , il n -esimo “grappolo” è contenuto in

$$\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{3n(n+1)} \right],$$

e questi intervalli sono a due a due disgiunti: il grappolo centrato in $1/n$ si trova a destra di $1/n$, mentre l'estremo destro del grappolo successivo è ancora strettamente minore di $1/n$. Dunque un punto $x > 0$ diverso da tutti i $1/n$ può incontrare, in un intorno sufficientemente piccolo, al più un grappolo; all'interno di un singolo grappolo l'unico punto di accumulazione è $1/n$. Il solo possibile punto di accumulazione prodotto dal passaggio $n \rightarrow \infty$ è 0. La coda $\{3, 4, 5, \dots\}$ non introduce punti di accumulazione finiti.

Pertanto

$$\mathcal{DE} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}, \quad +\infty \in \mathcal{D}^*E.$$

Infine ogni $c_{n,m}$ è isolato nel proprio grappolo e ogni intero ≥ 3 è isolato; i punti $1/n$ sono gli unici punti di E che appartengono a $\mathcal{DE}$. Quindi ogni punto di $E \setminus \mathcal{DE}$ è isolato.