

AM110 – Soluzioni

Estremo superiore e inferiore, successioni, parte intera e parte frazionaria

1. Per $(0, 1)$ si ha $\inf = 0$, $\sup = 1$ e non esistono minimo e massimo. Per $[0, 1)$: $\inf = \min = 0$, $\sup = 1$, nessun massimo. Per $(0, 1]$: $\inf = 0$, nessun minimo, $\sup = \max = 1$. Per $[0, 1]$: $\inf = \min = 0$ e $\sup = \max = 1$. Le affermazioni su $\sup$ e $\inf$ seguono dalla caratterizzazione mediante maggioranti/minoranti e dal fatto che tra due reali distinti c'è un reale strettamente intermedio.

2.

$$\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} < 1,$$

quindi 1 è un maggiorante. Se $t < 1$, per la proprietà archimedeica esiste n con $2/(n+1) < 1-t$; allora $(n-1)/(n+1) > t$, dunque t non è un maggiorante. Quindi $\sup A = 1$, che non è massimo. Inoltre

$$\frac{n-1}{n+1} \geq 0,$$

con uguaglianza per $n = 1$; pertanto $\inf A = \min A = 0$.

3. Poiché $1 - 1/n < 1$ e, dato $t < 1$, basta scegliere n con $1/n < 1-t$, si ha $\sup A = 1$ e non esiste massimo. Inoltre $1 - 1/n \geq 0$, con uguaglianza per $n = 1$; quindi $\inf A = \min A = 0$. Dato $\varepsilon > 0$, scegliendo $n > 1/\varepsilon$ si ottiene $1/n < \varepsilon$ e quindi

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Se $m \geq n$, allora $1/m \leq 1/n < \varepsilon$, perciò la stessa disuguaglianza vale per ogni $m \geq n$.

4. Si ottiene:

	inf	min	sup	max
A_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	no
A_2	0	no	1	1
A_3	-1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
A_4	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
A_5	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	no

Infatti $n/(n+1) = 1 - 1/(n+1)$, $A_2 = \{1/n\}$ e $(2n+1)/(n+1) = 2 - 1/(n+1)$. Per A_3 , i termini positivi sono $1/(2k)$ e quelli negativi sono $-1/(2k-1)$: il maggiore è $1/2$ e il minore è -1 . Per A_4 basta traslare di 1 lo stesso ragionamento: il minimo è 0 e il massimo $3/2$.

5. La densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ mostra che nessun estremo escluso dall'intervallo può essere migliorato. Dunque:

	inf	min	sup	max
$\mathbb{Q} \cap (0, 1)$	0	no	1	no
$\mathbb{Q} \cap [0, 1)$	0	0	1	no
$\mathbb{Q} \cap (0, 1]$	0	no	1	1
$\mathbb{Q} \cap [0, 1]$	0	0	1	1

6. Ogni elemento di A appartiene a $(0, 1)$. Dato $\varepsilon > 0$, scegliendo $n > 1/\varepsilon$ si ha $1/n \in A$ e $1/n < \varepsilon$; quindi $\inf A = 0$, senza minimo. Inoltre $(n-1)/n \in A$ per $n \geq 2$ e

$$1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$$

per $n > 1/\varepsilon$; dunque $\sup A = 1$, senza massimo.

7. Poniamo $B_1 = \{n/(n+2)\}$ e $B_2 = \{2 - 1/n\}$. Si ha

$$\frac{n}{n+2} = 1 - \frac{2}{n+2} \geq \frac{1}{3},$$

con uguaglianza per $n = 1$, mentre $B_2 \subset [1, 2)$. Quindi $\inf A = \min A = 1/3$. Inoltre 2 è un maggiorante e, per ogni $t < 2$, scegliendo n grande si ha $2 - 1/n > t$; pertanto $\sup A = 2$ e non esiste massimo.

8. Per definizione di s , $a_n \leq s$ per ogni n . Dalla caratterizzazione del $\sup$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $s - \varepsilon < a_N \leq s$. Se $n \geq N$, la crescenza dà $a_N \leq a_n \leq s$, dunque

$$s - \varepsilon < a_n \leq s.$$

9. Per definizione di s , $s \leq a_n$ per ogni n . Dalla caratterizzazione dell' $\inf$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $s \leq a_N < s + \varepsilon$. Se $n \geq N$, la decrescenza dà $s \leq a_n \leq a_N < s + \varepsilon$.

10.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

quindi la successione è strettamente crescente. Poiché $a_n = 1 - 1/(n+1)$, si ha

$$\inf = \min = \frac{1}{2}, \quad \sup = 1,$$

e non esiste massimo. Se $N > 1/\varepsilon$, allora per $n \geq N$

$$1 - a_n = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

11. Poiché

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0,$$

la successione è strettamente decrescente. Quindi $\sup = \max = 1$. Inoltre $1/n > 0$ e, per ogni $\varepsilon > 0$, se $n > 1/\varepsilon$ allora $1/n < \varepsilon$; pertanto $\inf = 0$ e non esiste minimo. Lo stesso calcolo mostra che basta scegliere $N > 1/\varepsilon$.

12. Si ha

$$a_n = 2 - \frac{1}{n+1},$$

quindi $a_{n+1} > a_n$, $\inf = \min = 3/2$, $\sup = 2$ e non esiste massimo. Se $N > 1/\varepsilon$, per $n \geq N$,

$$2 - a_n = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

13. Per $0 \leq x < y$,

$$\frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} > 0,$$

quindi f è strettamente crescente. Inoltre

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+x},$$

perciò $0 \leq f(x) < 1$, $f(0) = 0$, e i valori possono essere resi arbitrariamente vicini a 1. Dunque $\inf = \min = 0$, $\sup = 1$, nessun massimo. Se $M > 1/\varepsilon$, per $x \geq M$ si ha $1 - f(x) = 1/(1+x) < \varepsilon$.

14. Per $0 \leq x < y$,

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} > 0,$$

quindi f è strettamente decrescente. Si ha $0 < f(x) \leq 1$, con $f(0) = 1$, e i valori sono arbitrariamente piccoli positivi. Pertanto $\sup = \max = 1$, $\inf = 0$, nessun minimo. Se $M > 1/\varepsilon$, allora per $x \geq M$, $0 < f(x) < 1/M < \varepsilon$.

15. Dalla definizione di s e dalla caratterizzazione del $\sup$ esiste $x_0 \geq 0$ tale che

$$s - \varepsilon < f(x_0) \leq s.$$

Scegliamo $M > x_0$. Per $x \geq M$, dalla crescenza,

$$s - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq s.$$

16. (i) $[2x] = 3$ equivale a $3 \leq 2x < 4$, cioè

$$S_1 = [3/2, 2).$$

Quindi $\inf S_1 = \min S_1 = 3/2$, $\sup S_1 = 2$, e non esiste massimo.

(ii) Posto $k = [x] = [2x] \in \mathbb{Z}$, devono valere

$$k \leq x < k+1, \quad k \leq 2x < k+1.$$

Per $k = 0$ si ottiene $x \in [0, 1/2)$; per $k = -1$, $x \in [-1/2, 0)$; per ogni altro k l'intersezione è vuota. Dunque

$$S_2 = [-1/2, 1/2),$$

con $\inf = \min = -1/2$, $\sup = 1/2$ e nessun massimo.

(iii) $\{x\} = 3/4$ se e solo se

$$x = k + \frac{3}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'insieme è illimitato superiormente e inferiormente: non esistono quindi, in $\mathbb{R}$, né $\sup$ né $\inf$, e neppure massimo o minimo.

17. Se $x \in \mathbb{Z}$, allora $[-x] = -x$ e $\{x\} = \{-x\} = 0$, quindi le due somme valgono 0. Se $x \notin \mathbb{Z}$, scriviamo $x = k + t$, con $k \in \mathbb{Z}$ e $0 < t < 1$. Allora

$$-x = -(k+1) + (1-t),$$

perciò $[-x] = -k-1$ e $\{-x\} = 1-t$. Quindi

$$[x] + [-x] = -1, \quad \{x\} + \{-x\} = 1.$$

18. Scriviamo $x = [x] + a$, $y = [y] + b$, con $a = \{x\}$, $b = \{y\} \in [0, 1)$. Allora

$$[x+y] = [x] + [y] + [a+b].$$

Poiché $0 \leq a+b < 2$, si ha $[a+b] \in \{0, 1\}$, da cui

$$[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1.$$

Precisamente, vale la prima uguaglianza se $a+b < 1$ e la seconda se $a+b \geq 1$.

19. Ponendo $t = \{x\} \in [0, 1)$, si ha $x = [x] + t$ e quindi

$$[nx] = [n[x] + nt] = n[x] + [nt].$$

Poiché $0 \leq nt < n$, risulta $0 \leq [nt] \leq n-1$, e dunque

$$n[x] \leq [nx] \leq n[x] + n-1.$$

La prima uguaglianza vale se e solo se $[nt] = 0$, cioè $0 \leq t < 1/n$; la seconda se e solo se $[nt] = n-1$, cioè $(n-1)/n \leq t < 1$.

20. Poiché $\{x\} \in [0, 1)$ e ogni $t \in [0, 1)$ è la parte frazionaria di $x = t$, si ha

$$A = [0, 1).$$

Pertanto $\inf A = \min A = 0$, $\sup A = 1$ e non esiste massimo.

Per B , posto $t = \{x\} \in [0, 1)$,

$$t(1-t) = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4},$$

con uguaglianza per $t = 1/2$; inoltre $t(1-t) \geq 0$, con uguaglianza per $t = 0$. Quindi

$$\inf B = \min B = 0, \quad \sup B = \max B = \frac{1}{4}.$$