

Note e commenti al testo

Analisi su $\mathbb{R}$ – guida ai principi dell'analisi matematica

Luigi Chierchia

1ed 8838624771 · 9788838624773

Aggiornato al 2 ottobre 2026

Questo documento raccoglie note, commenti e precisazioni su alcuni punti del testo e potrà essere aggiornato periodicamente con nuove note.

Tutti i riferimenti a equazioni, proposizioni, pagine, ecc. sono al testo, in particolare, dopo il titolo della “nota/commento” viene indicato tra parentesi quadrate il paragrafo/sezione del testo a cui si riferisce.

Indice delle note e dei commenti

Dimostrazione di $ x \cdot y = x \cdot y $ [§1.1.3]	2
Induzione e ordine dei numeri naturali [§1.2.1]	2
Non uniforme continuità: un criterio sequenziale [§2.6.1]	4
Un commento sulle ipotesi della Proposizione 2.55 [§2.6.1]	4
Bisezione e teoremi di Bolzano & Co. [§2.6.4, §6.2.1, §6.3.2]	4
Un limite notevole: $\log n! \sim n \log n$ [§2.7.4]	6
Sulla dimostrazione della regola di Bernoulli–Hôpital [§3.1.2]	6
Sulla dimostrazione del Lemma 3.26 [§3.2.2]	6
Sull'enunciato del Lemma 3.27 [§3.2.2]	7
I limiti notevoli (3.57) senza la regola di Bernoulli–Hôpital [§3.2.3]	7
Una generalizzazione della regola di Leibniz [§3.3]	7
Funzioni a scalini e partizioni [§4.2.2]	8
Un'osservazione sulle somme di Riemann [§4.2.2]	8
Sulle ipotesi del Corollario 4.34 (integrazione per parti) [§4.3.1]	9
“Leibniz continuo” [§4.4]	9
Osservazioni sui criteri della radice e del rapporto [§5.1.4]	10
Su una proprietà del limite superiore [§5.1.4]	11
Una caratterizzazione di raggio di convergenza positivo [§5.2.1]	11
Sulla regolarità delle serie di potenze [§5.2.2]	11
Funzioni C^∞ non analitiche [§5.2.3]	13
Serie di Taylor–Maclaurin della tangente [§5.2.3]	14
Algebra dei limiti in $\mathbb{C}$ [§5.2.4]	15
Teorema di addizione per l'esponenziale complesso [§5.2.4]	15
Interno, chiusura e frontiera: semplici relazioni [§6.1.2]	16
Una dimostrazione immediata di Bolzano–Weierstrass [§6.2.1]	17

Dimostrazione di $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ [§1.1.3]

Dimostriamo in dettaglio la proprietà (iii) del valore assoluto a pag. 11, ossia, l'uguaglianza: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Se $x, y \geq 0$, allora $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$;

(b) se $x, y \leq 0$, allora $|x \cdot y| = |(-x) \cdot (-y)| \stackrel{(a)}{=} |(-x)| \cdot |(-y)| \stackrel{(ii)}{=} |x| \cdot |y|$;

(c) se $x \geq 0 \geq y$, allora $|x \cdot y| \stackrel{(ii)}{=} |x \cdot (-y)| \stackrel{(a)}{=} |x| \cdot |-y| \stackrel{(ii)}{=} |x| \cdot |y|$;

(d) l'ultimo caso ($y \geq 0 \geq x$) è solo un cambio di nomi rispetto al precedente. ■

Induzione e ordine dei numeri naturali [§1.2.1]

Rivisitiamo qui il paragrafo 1.2.1 con lo scopo di rendere - forse - più semplici e dirette alcune dimostrazioni. In particolare l'ordine delle affermazioni del §1.2.1 è diverso da quello seguito qui e il corrispondente risultato nel §1.2.1 verrà indicato tra parentesi quadrate.

Iniziamo con una semplice osservazione preliminare che deriva dalla definizione di $\mathbb{N}$ come più piccolo sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$:

Lemma A Sia $\mathbb{N}_2 := \{m + 1 \mid m \in \mathbb{N}\}$. Allora, $\mathbb{N} = \{1\} \cup \mathbb{N}_2$.

Dimostrazione Sia $I := \{1\} \cup \mathbb{N}_2$. Chiaramente, $I \subseteq \mathbb{N}$. Dimostriamo che I è induttivo. Per definizione di I , $1 \in I$. Sia $n \in I$. Poiché $n \in \mathbb{N}$, per definizione di $\mathbb{N}_2$ si ha $n + 1 \in \mathbb{N}_2 \subseteq I$. Quindi I è induttivo e, per (P_5) , $I = \mathbb{N}$. ■

Si noti che, in particolare, se $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 1$, allora $n \geq 2$ (poiché tutti i numeri in $\mathbb{N}_2$ sono maggiori o uguali a 2) e quindi non esistono numeri naturali m con $1 < m < 2$.

Osserviamo anche che una riformulazione del Lemma A è la seguente:

$$n \in \mathbb{N}, n > 1 \implies \exists m \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = m + 1. \quad (*)$$

Il cosiddetto “principio di induzione” segue immediatamente dalla definizione di $\mathbb{N}$:

Teorema B (Principio di induzione) [Teorema 1.18] Sia $\mathcal{P}(n)$ una proposizione che dipenda da $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $\mathcal{P}(1)$ sia vera e che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1)$. Allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione Sia $I := \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}(n) \text{ è vera}\}$. Dalle ipotesi segue che $I \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo e quindi, per (P_5) , $I = \mathbb{N}$. ■

Teorema C [Proposizione 1.21] Se $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ sono tali che $n < x < n + 1$, allora $x \notin \mathbb{N}$.

Dimostrazione Procediamo per induzione su n . Sia $\mathcal{P}(n)$ la proposizione: “se $n < x < n + 1$, allora $x \notin \mathbb{N}$ ”. $\mathcal{P}(1)$ segue dal Lemma A. Assumiamo vera $\mathcal{P}(n)$, con $n \in \mathbb{N}$, e sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $n + 1 < x < n + 2$. Se, per assurdo, $x \in \mathbb{N}$, allora $x > 1$ e, per il Lemma A, $x = m + 1$ per qualche $m \in \mathbb{N}$. Sottraendo 1 si ottiene $n < m < n + 1$, in contraddizione con l'ipotesi induttiva. Dunque $x \notin \mathbb{N}$. ■

Dal Teorema C segue subito il

Corollario D [Corollario 1.22] *Se $n, m \in \mathbb{N}$ e $n > m$, allora $n \geq m + 1$.*

Dimostrazione Se fosse $n < m + 1$, si avrebbe $m < n < m + 1$, in contraddizione con il Teorema C. ■

Teorema E [Corollario 1.25] *Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ e supponiamo che esista $m \in \mathbb{N}$ tale che $n \leq m$ per ogni $n \in A$. Allora A ha massimo¹.*

Dimostrazione Per $m \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{P}(m)$ la proposizione: “ogni insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{N}$ i cui elementi sono minori o uguali a m ha massimo”. Dimostriamo per induzione che $\mathcal{P}(m)$ è vera per ogni m . Per $m = 1$, $A = \{1\}$ che ha massimo 1, quindi $\mathcal{P}(1)$ è vera. Sia $m \geq 1$ e supponiamo vera $\mathcal{P}(m)$. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $n \leq m + 1$ per ogni $n \in A$. Se $m + 1 \in A$, allora $m + 1$ è il massimo di A . Se invece $m + 1 \notin A$, si ha, in particolare, che $n \neq m + 1$ per ogni $n \in A$ e quindi $n < m + 1$ per ogni $n \in A$ e dal Corollario D segue che ogni $n \in A$ soddisfa $n \leq m$. Ma, allora, per l’ipotesi induttiva, A ha massimo e la tesi segue per induzione. ■

Teorema F [Proposizione 1.23] *Siano $n > m$ numeri naturali. Allora $n - m \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione Sia $A := \{h \in \mathbb{N} \mid m + h \leq n\}$. Per il Corollario D, $n \geq m + 1$ e quindi $1 \in A$, che quindi è non vuoto. Inoltre, se $h \in A$, allora $h < m + h \leq n$ e quindi A ha come maggiorante n . Per il Teorema E, A ha massimo M . Ma, allora $m + M = n$ (se fosse $m + M < n$ si avrebbe (per il Corollario D) $m + M + 1 \leq n$, che implica $M + 1 \in A$, contraddicendo la massimalità di M). La tesi segue essendo $M = n - m \in \mathbb{N}$. ■

Concludiamo con il cosiddetto “principio del minimo o del buon ordinamento”, la dimostrazione del quale si basa sul

Teorema B' (Principio di induzione forte) [Osservazione 1.19–(i)]

Se $\mathcal{P}(1)$ è vera e “ $\mathcal{P}(k)$ vera $\forall 1 \leq k \leq n \implies \mathcal{P}(n + 1)$ vera”, allora $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione Sia $\mathcal{P}'(n)$ l’affermazione: “ $\mathcal{P}(k)$ è vera per ogni $1 \leq k \leq n$ ”. In vista del Teorema C, la tesi segue dal Teorema B applicato a² $\mathcal{P}'(n)$. ■

Formuliamo, infine, e dimostriamo il principio del minimo:

Teorema G [Proposizione 1.24] *Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette minimo.*

Dimostrazione Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ e supponiamo, per assurdo, che A non abbia minimo. Mostriamo per induzione forte che $n \notin A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. $1 \notin A$, altrimenti 1 sarebbe il minimo di A . Supponiamo ora che $k \notin A$ per ogni $1 \leq k \leq n$. Se $n + 1 \in A$, allora, per il Corollario D, ogni numero naturale minore di $n + 1$ è minore o uguale a n e dunque non appartiene ad A . Quindi $n + 1$ sarebbe il minimo di A , contro l’ipotesi. Dunque anche $n + 1 \notin A$. Per induzione forte, $n \notin A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma questo significa che $A = \emptyset$, in contraddizione con l’ipotesi. ■

¹Cfr. Definizione 1.2 nel testo per la definizione di massimo/minimo e maggiorante/minorante.

²Perché bisogna invocare il Teorema C?

Non uniforme continuità: un criterio sequenziale [§2.6.1]

La negazione della uniforme continuità (cfr. Eq. (2.30) a p. 76) è:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall \delta > 0, \exists x, y \in A \text{ per cui } |x - y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \quad (*)$$

e tale relazione a sua volta (prendendo $\delta = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ in $(*)$) implica il seguente³

Criterio di non uniforme continuità *Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è uniformemente continua su A se e solo se esiste $\varepsilon > 0$ ed esistono due successioni in A , $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, tali che $\lim |x_n - y_n| = 0$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ per ogni n .*

Questo criterio può essere utile per mostrare, in taluni casi, che una funzione continua non è uniformemente continua. Ad esempio, $f(x) := \cos x^2$ (che è continua su $\mathbb{R}$) non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$: prendendo $x_n = \sqrt{2\pi n}$ e $y_n = \sqrt{2\pi n + \pi/2}$ si ha che $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ e

$$|x_n - y_n| = \frac{\pi/2}{x_n + y_n} \rightarrow 0,$$

quindi vale $(*)$ con $\varepsilon = 1$, per cui f non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

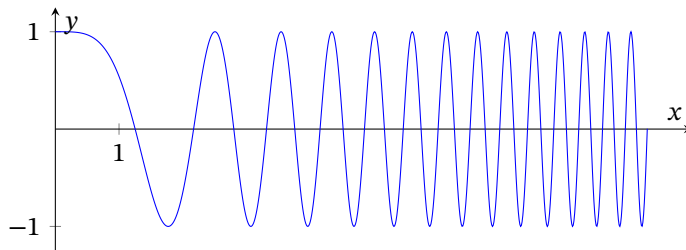


Grafico di $f(x) = \cos x^2$.

Il grafico evidenzia come le oscillazioni di f diventino sempre più rapide al crescere di x , il che, per $x \rightarrow +\infty$ fa perdere l'uniforme continuità.

Un commento sulle ipotesi della Proposizione 2.55 [§2.6.1]

L'ipotesi che I sia un intervallo nell'enunciato della Proposizione 2.55 non può essere omessa: $f : x \in I := \mathbb{N} \mapsto f(x) = x^2$ è uniformemente continua su I (basta prendere $0 < \delta < 1/2$) ma ovviamente ha crescita quadratica e non lineare.

Bisezione e teoremi di Bolzano & Co. [§2.6.4, §6.2.1, §6.3.2]

Anticipiamo qui una delle formulazioni del Teorema di Bolzano–Weierstrass e da questo deriviamo dimostrazioni semplici del Teorema di Weierstrass su intervalli compatti (dimostrazione alternativa – e forse più semplice – a quella data nella §2.6.4) e del Teorema di Heine–Cantor sulla uniforme continuità di funzioni continue su intervalli compatti. Il metodo su cui si basa la dimostrazione del Teorema di Bolzano–Weierstrass è noto come “metodo di bisezione”

³Questo è il testo dell'Esercizio 6.27.

Teorema di Bolzano–Weierstrass Siano $-\infty < a < b < +\infty$ e siano, per $n \geq 1$, $x_n \in [a, b]$. Allora esistono $x_0 \in [a, b]$ e numeri naturali $n_0 = 1 < n_1 < n_2 < \dots$ tali che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = x_0$.

Dimostrazione Costruiamo iterativamente una successione di intervalli

$$[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}] \subseteq \dots \subseteq [a_0, b_0] := [a, b], \quad b_j - a_j = \frac{b-a}{2^j},$$

come segue. Assumiamo, per $n \geq 1$, che

$$[a_{n-1}, b_{n-1}] \subseteq [a, b], \quad b_{n-1} - a_{n-1} = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \quad \#\{j \mid x_j \in [a_{n-1}, b_{n-1}]\} = \infty. \quad (*)$$

Si noti che per $n = 1$ tali ipotesi sono ovviamente vere. Sia, ora, $c_n := (a_{n-1} + b_{n-1})/2$, e poniamo

$$\begin{cases} a_n := a_{n-1}, & b_n := c_n, & \text{se } \#\{j \in \mathbb{N} \mid x_j \in [a_{n-1}, c_n]\} = \infty, \\ a_n := c_n, & b_n := b_{n-1}, & \text{se } \#\{j \in \mathbb{N} \mid x_j \in [a_{n-1}, c_n]\} < \infty. \end{cases}$$

Chiaramente, nel secondo caso (essendo $\#\mathbb{N} = \infty$), si ha che $\#\{j \in \mathbb{N} \mid x_j \in [c_n, b_{n-1}]\} = \infty$, e quindi vale (*) con n al posto di $n-1$. Osserviamo che la successione $\{a_n\}$ è crescente (ossia, non decrescente) e $\{b_n\}$ decrescente; quindi tali successioni hanno limite finito in $[a, b]$ e poiché $\lim b_n = \lim (a_n + (b-a)/2^n) = \lim a_n$ il limite è lo stesso $x_0 \in [a, b]$. Costruiamo, ora, (sempre iterativamente) una successione $n_k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 0$) strettamente crescente (e quindi che tende a $+\infty$) e tale che $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$: per $k = 0$ possiamo prendere $n_0 = 1$; poi, siccome ogni $[a_k, b_k]$ contiene infiniti n tali che $x_n \in [a_k, b_k]$, possiamo sempre scegliere un $n_k > n_{k-1}$ tale che $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Per il teorema del confronto anche $x_{n_k} \rightarrow x_0$. ■

Dimostrazione (del Teorema 2.63) Come osservato nel testo basta dimostrare il caso del massimo (il caso del minimo segue da questo considerando $-f$).

Sia $M := \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \in (-\infty, +\infty]$ (è ammesso anche il caso $M = +\infty$ che, a posteriori, vedremo non si verifica). Per la Proposizione 2.42, esiste una successione $\{x_n\}$ in $[a, b]$ tale che $f(x_n) \rightarrow M$. Per il Teorema di Bolzano–Weierstrass, esistono $x_0 \in [a, b]$ e numeri naturali $n_0 = 1 < n_1 < n_2 < \dots$ tali che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = x_0$. Per il teorema ponte, $f(x_{n_k}) \rightarrow M$; ma per la continuità di f , $\lim_k f(x_{n_k}) = f(x_0)$ e quindi $f(x_0) = M$. ■

Teorema di Heine–Cantor su intervalli Sia f continua sull'intervallo compatto $[a, b]$. Allora, f è uniformemente continua su $[a, b]$.

Dimostrazione Supponiamo, per assurdo, che f non sia uniformemente continua su $[a, b]$. Allora, per il [criterio di non uniforme continuità](#) della nota “Non uniforme continuità: un criterio sequenziale”, esistono $\varepsilon > 0$ e successioni x_n e y_n in $[a, b]$ tali che $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ per ogni n . Per il Teorema di Bolzano–Weierstrass, esistono $x_0 \in [a, b]$ e numeri naturali $n_0 = 1 < n_1 < n_2 < \dots$ tali che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = x_0$. Ma allora, essendo $|y_{n_k} - x_0| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0|$, anche $y_{n_k} \rightarrow x_0$, e questo porta alla contraddizione: $0 < \varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \rightarrow |f(x_0) - f(x_0)| = 0$. ■

Un limite notevole: $\log n! \sim n \log n$ [§2.7.4]

Poiché $\log x$ è una funzione crescente, prendendo il logaritmo nelle relazioni in (2.23), tali relazioni rimangono invariate e dividendo successivamente per $n \log n$ e prendendo il limite per $n \rightarrow +\infty$, si ottiene $\log n! \sim n \log n$.

Sulla dimostrazione della regola di Bernoulli–Hôpital [§3.1.2]

A fine pagina 102 si fa un'osservazione per ridursi al caso $L \geq 0$ usando la permanenza del segno per dire che $f'/g' < 0$ vicino a x_0 e quindi che una delle funzioni è strettamente crescente e l'altra strettamente decrescente (e questo porta ad una contraddizione). Ora, in generale, questo è vero se si assume che f' e g' siano anche continue vicino a x_0 , ipotesi però non necessaria al Teorema 3.19. La cosa più semplice per evitare questa innaturale ipotesi aggiuntiva è ridefinire l'intorno V , per ε e M numeri positivi, come segue:

$$V := \begin{cases} (L - \varepsilon, L + \varepsilon) & \text{se } L \in \mathbb{R}, \\ (M, +\infty), & \text{se } L = +\infty, \\ (-\infty, -M), & \text{se } L = -\infty. \end{cases}$$

e sostituire la (3.25) con

$$f(\xi) > 0, \quad g(\xi) > 0, \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \begin{cases} (L - \frac{\varepsilon}{2}, L + \frac{\varepsilon}{2}), & \text{se } L \in \mathbb{R}, \\ (2M, +\infty), & \text{se } L = +\infty, \\ (-\infty, -2M), & \text{se } L = -\infty \end{cases} \quad (3.25)$$

osservando, infine, che il caso $L = -\infty$ è del tutto analogo al caso $L = +\infty$.

Sulla dimostrazione del Lemma 3.26 [§3.2.2]

Vale la pena di osservare che $x \in [0, 1) \mapsto \sqrt{1 + g'^2}$ è una funzione strettamente crescente e quindi, per $h > 0$ tale che $x + h < 1$,

$$\alpha(h) = \sqrt{1 + g'^2(x)}, \quad \beta(h) = \sqrt{1 + g'^2(x + h)},$$

da cui, in particolare, segue immediatamente che

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \alpha(h) = \lim_{h \rightarrow 0+} \beta(h) = \sqrt{1 + g'^2(x)}.$$

Sull'enunciato del Lemma 3.27 [§3.2.2]

È facile vedere che vale un enunciato più forte del Lemma 3.27, ossia:

Lemma 3.27 *La funzione $\text{Arccos}: x \in [0, 1] \mapsto t = \text{Arccos } x$ è continua su $[0, 1]$ e strettamente decrescente, $\text{Arccos } 0 = \pi/2$, $\text{Arccos } 1 = 0$, e $\text{Arccos}([0, 1]) = [0, \pi/2]$. Inoltre, $\text{Arccos} \in C^\infty([0, 1))$ ed è strettamente decrescente e concava (strettamente su $(0, 1)$):*

$$D \text{Arccos } x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0, \quad D^2 \text{Arccos } x = -\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \leq 0.$$

I limiti notevoli (3.57) senza la regola di Bernoulli–Hôpital [§3.2.3]

Nel testo si invoca la regola di Bernoulli–Hôpital per dimostrare i limiti notevoli del seno e coseno in zero; cfr. (3.57). In effetti, è molto più semplice osservare che il primo limite,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

è la derivata in $t = 0$ del seno, che è stato dimostrato essere $\cos t|_{t=0} = 1$.

Per il secondo limite, basta osservare che

$$\frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1 - \cos^2 t}{t^2(1 + \cos t)} = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos t} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (t \rightarrow 0).$$

Una generalizzazione della regola di Leibniz [§3.3]

La regola di Leibniz (formula (3.14)) ammette la seguente generalizzazione:

se f e g sono derivabili n volte in x_0 , allora

$$D^n(fg)(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f(x_0) D^{n-k} g(x_0), \quad (*)$$

(si ricorda che $D^0 f := f$).

Dimostrazione Dimostriamo (*) per induzione su $n \geq 0$. Per $n = 0$, (*) è vera per definizione, mentre per $n = 1$, (*) è la regola di Leibniz (3.14). Assumiamo (*) vera per $n \geq 1$ e dimostriamola con $n + 1$ al posto di n . Nelle seguenti identità non indichiamo esplicitamente il punto x_0 dove sono fatte le derivate.

$$\begin{aligned} D^{n+1}(fg) &= D(D^n(fg)) \stackrel{(*)}{=} D \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f D^{n-k} g \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (D^{k+1} f D^{n-k} g + D^k f D^{n+1-k} g) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{k+1} f D^{n-k} g + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f D^{n+1-k} g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} D^k f D^{n+1-k} g + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f D^{n+1-k} g \\
&= D^{n+1} f g + f D^{n+1} g + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) D^k f D^{n+1-k} g \\
&= D^{n+1} f g + f D^{n+1} g + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} D^k f D^{n+1-k} g \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} D^k f D^{n+1-k} g,
\end{aligned}$$

(nella penultima uguaglianza abbiamo usato la proprietà (iii), Lemma 1.37 dei coefficienti binomiali). ■

Funzioni a scalini e partizioni [§4.2.2]

Diamo qui una dimostrazione alternativa del Lemma 4.26 che asserisce che *date due funzioni a scalini*⁴ $f, g \in S(I)$ è possibile trovare una partizione $\{I_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ e numeri α_j e β_j tali che

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{I_j} \quad g = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{I_j}.$$

Dimostrazione Dal Lemma 4.8 segue che esistono m intervalli $J_k \subseteq I$ limitati e a due a due disgiunti su cui le funzioni f e g assumono valori costanti α_k e β_k rispettivamente ed inoltre f e g sono nulle sull'insieme elementare $E := I \setminus (\cup J_k)$. Poiché E è elementare, $E = \sqcup_h J'_h$ con $1 \leq h \leq m'$ e $J'_h \subseteq I$ intervalli limitati e a due a due disgiunti. La partizione sarà data dunque da $\{J_k\} \cup \{J'_h\}$ definendo 0 i coefficienti α'_h e β'_h di f e g sugli intervalli J'_h . ■

Un'osservazione sulle somme di Riemann [§4.2.2]

Vale la pena di osservare esplicitamente che se $f \in \mathcal{R}(I)$, $\alpha \geq 0$, e $\{I_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ è una partizione di I tale che

$$\sum_{j=1}^n (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) |I_j| \leq \alpha, \quad (*)$$

allora, per ogni $\xi_j \in I_j$ si ha che

$$\left| \int_I f - \sum_{j=1}^n f(\xi_j) |I_j| \right| \leq \alpha.$$

⁴Si ricordi che nella sezione §4.2 abbiamo assunto l'intervallo di riferimento I limitato (e non vuoto).

Dimostrazione Su I_j si ha che $|f - f(\xi_j)| \leq \sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f$, e quindi:

$$\begin{aligned} \left| \int_I f - \sum_{j=1}^n f(\xi_j) |I_j| \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \int_{I_j} (f - f(\xi_j)) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{I_j} |f - f(\xi_j)| \\ &\leq \sum_{j=1}^n (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) |I_j| \stackrel{(*)}{\leq} \alpha. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Sulle ipotesi del Corollario 4.34 (integrazione per parti) [§4.3.1]

Le ipotesi del Corollario possono essere sostituite dall'ipotesi più naturale:

Siano f, g derivabili su I intervallo limitato con $f', g' \in \mathcal{R}(I)$.

Infatti, dati $a, b \in I$, essendo f e g continue sull'intervallo J di estremi a e b si ha che $f'g, fg' \in \mathcal{R}(J)$ (che sono le ipotesi fatte nel Corollario 4.34).

“Leibniz continuo” [§4.4]

Il criterio di Leibniz per serie asserisce che se $a_n \downarrow 0$, allora la serie a segni alterni $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge (in generale, non assolutamente). Il corrispettivo per gli integrali impropri è il seguente⁵

Criterio di Leibniz continuo Se $g \in C(\mathbb{R})$ è una funzione periodica a media nulla e $0 < f \in C^1([a, +\infty))$ è decrescente con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$, allora $fg \in \mathcal{R}^*([a, +\infty))$, ossia fg è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$.

Dimostrazione Sia $T > 0$ il periodo di g e sia

$$G(x) := \int_a^x g(t) dt.$$

Il fatto che g ha media nulla implica che $\int_c^{c+T} g = 0$ per ogni c , e questo, a sua volta implica che G è limitata. Allora, per ogni $b > a$, per il teorema fondamentale del calcolo, integrando per parti, si ha che

$$\int_a^b fg = \int_a^b fG' = [fG]_a^b + \int_a^b (-f')G. \quad (*)$$

Ora, poiché G è limitata, $f(b) \rightarrow 0$ per $b \rightarrow +\infty$ e $G(a) = 0$, si ha che $[fG]_a^b \rightarrow 0$ per $b \rightarrow +\infty$. Inoltre, poiché f è decrescente, $-f' \geq 0$ e quindi, ponendo $M = \sup |G| < +\infty$, si ha che

$$\int_a^b |(-f')G| \leq M \int_a^b |-f'| = -M \int_a^b f' = M(f(a) - f(b)) \leq Mf(a).$$

⁵La funzione f corrisponde alla successione $\{a_n\}$ e la funzione g periodica e a media nulla corrisponde alla successione periodica (di periodo 1) a media nulla $(-1)^{n-1}$. Cfr. anche Es. 4.19.

Da tale relazione e da (*) segue l'asserto. ■

Si noti che con le posizioni fatte si ha che

$$\int_a^{+\infty} fg = - \int_a^{+\infty} f'G,$$

dove l'integrale nella parte destra è assolutamente convergente.

Osservazioni sui criteri della radice e del rapporto [§5.1.4]

Nella seconda parte degli enunciati (i) dei criteri della radice e del rapporto (pp. 183 e 184) si può direttamente assumere $a_n^{1/n} \geq 1$ o $a_{n+1}/a_n \geq 1$ ($\forall n \geq N$), poiché queste ipotesi portano immediatamente al fatto che $a_n \geq 1$ per ogni $n \geq N$ nel caso della radice, e a $a_n \geq a_N$ per ogni $n \geq N$ nel caso del rapporto; in entrambi i casi si ha divergenza per il criterio necessario di Cauchy.

Nella parte (ii) dei due criteri, nel caso $\theta > 1$ (divergenza), il valore $\theta = +\infty$ è ovviamente ammesso.

Più interessante è il fatto che *il criterio del rapporto è più forte del criterio della radice*:

Proposizione Siano $a_j > 0$ tali che $\frac{a_{j+1}}{a_j} \rightarrow L \in \mathbb{R}^*$, allora $a_j^{1/j} \rightarrow L$.

Dimostrazione Osserviamo che se esistono $\alpha > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tali che $\alpha < \frac{a_{j+1}}{a_j}$ per ogni $j \geq m$, iterando, segue che $\alpha^k a_m < a_{m+k}$ per ogni $k \geq 1$, e quindi (ponendo $j := m + k$),

$$\alpha < \frac{a_{j+1}}{a_j}, \quad \forall j \geq m \quad \implies \quad \alpha \left(\frac{a_m}{\alpha^m} \right)^{1/j} < a_j^{1/j}, \quad \forall j > m. \quad (*)$$

Analogamente, si ha che

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} < \beta, \quad \forall j \geq m \quad \implies \quad a_j^{1/j} < \beta \left(\frac{a_m}{\beta^m} \right)^{1/j}, \quad \forall j > m. \quad (**)$$

Distinguiamo i tre casi (i): $L = +\infty$, (ii): $L = 0$ e (iii): $L \in (0, +\infty)$.

(i): Sia $M > 0$. Dall'ipotesi segue che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che vale (*) con $\alpha := 2M$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\left(\frac{a_m}{\alpha^m} \right)^{1/j} > \frac{1}{2}$ per ogni $j > n$ e sia $N = \max\{n, m\}$. Dalla seconda relazione in (*) segue che $a_j^{1/j} > M$ se $j > N$. Abbiamo dimostrato che $a_j^{1/j} \rightarrow +\infty$.

(ii): Sia $\varepsilon > 0$. Dall'ipotesi segue che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che vale (**) con $\beta := \varepsilon/2$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\left(\frac{a_m}{\beta^m} \right)^{1/j} < 2$ per ogni $j > n$ e sia $N = \max\{n, m\}$. Dalla seconda relazione in (**) segue che $a_j^{1/j} < \varepsilon$ per ogni $j > N$. Abbiamo dimostrato che $a_j^{1/j} \rightarrow 0$.

(iii): Sia $0 < \varepsilon < L$. Dall'ipotesi segue che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che vale (*) con $\alpha := L - \varepsilon/2$ e (**) con $\beta := L + \varepsilon/2$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\left(\frac{a_m}{\alpha^m} \right)^{1/j} > \frac{L - \varepsilon}{L - \varepsilon/2}$ e $\left(\frac{a_m}{\beta^m} \right)^{1/j} < \frac{L + \varepsilon}{L + \varepsilon/2}$

per ogni $j > n$ e sia $N = \max\{n, m\}$. Dalle seconde relazioni in (*) e (**) segue che $L - \varepsilon < a_j^{1/j} < L + \varepsilon$ per $j > N$. Abbiamo dimostrato che $a_j^{1/j} \rightarrow L$. ■

In particolare, nei casi in cui il criterio della radice è inconclusivo (ossia o non esiste il limite o $a_n^{1/n} \rightarrow 1$) è inutile provare il criterio del rapporto, che darebbe lo stesso esito.

Su una proprietà del limite superiore [§5.1.4]

Diamo una dimostrazione più diretta e semplice della proprietà (ii) del Lemma 5.19, il cui enunciato è:

Sia $M := \overline{\lim} a_n$. Se $M > -\infty$, per ogni $\alpha < M$ e per ogni N esiste $n \geq N$ tale che $a_n > \alpha$

Dimostrazione $\forall m, \bar{a}_m \geq M > \alpha$. In particolare, $\bar{a}_N \geq M$ e quindi $\exists n \geq N$ tale che $a_n > \alpha$. ■

Una caratterizzazione di raggio di convergenza positivo [§5.2.1]

La formula di Cauchy–Hadamard asserisce che il raggio di convergenza R di una serie di potenze $\sum a_n(x - x_0)^n$ è dato dalla

$$R = (\overline{\lim} |a_n|^{1/n})^{-1}, \quad (\text{dove } (+\infty)^{-1} := 0 \text{ e } 0^{-1} := +\infty).$$

Quindi, $R > 0$ è equivalente a dire che $\alpha := \overline{\lim} |a_n|^{1/n} < +\infty$.

Ora, se $R > 0$, dalle proprietà del limite superiore segue che, per ogni $\beta > \alpha$, esiste N tale che $|a_n| \leq \beta^n$ per ogni $n \geq N$, per cui⁶,

$$\exists c, M \in (0, +\infty) \text{ tali che } |a_n| \leq cM^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (*)$$

Viceversa, se vale (*), $|a_n|^{1/n} \leq c^{1/n}M$ e quindi $\overline{\lim} |a_n|^{1/n} \leq M < +\infty$, ossia che $R > 0$. In conclusione, $R > 0$ se e solo se vale (*).

Sulla regolarità delle serie di potenze [§5.2.2]

La trattazione della regolarità delle serie di potenze può essere resa più generale facendo uso del seguente criterio di derivazione termine a termine, basato sul criterio di Weierstrass (o M -test⁷).

Lemma (Weierstrass) *Sia E un intervallo di $\mathbb{R}$ e siano $u_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili tali che, se $M_n := \sup_E |u_n|$ e $M'_n := \sup_E |u'_n|$, le serie $\sum M_n$ e $\sum M'_n$ convergano. Allora, la funzione $x \in E \mapsto \sum u_n(x)$ definisce una funzione f derivabile su E e si ha che $f'(x) = \sum u'_n(x)$ per ogni $x \in E$.*

Dimostrazione Poiché $\sum M_n < +\infty$, la serie $\sum u_n(x)$ converge assolutamente per ogni $x \in E$ e definisce una funzione $x \in E \mapsto f(x)$. Fissiamo $x \in E$ e sia $h \neq 0$ tale che

⁶Si prenda $M = \beta$ e $c = \max\{1, |a_0|, \max_{1 \leq k < N} |a_k|/\beta^k\}$, omettendo l'ultimo massimo se $N = 1$.

⁷Per il criterio di Weierstrass (o M -test), cfr. https://it.wikipedia.org/wiki/Criterio_di_Weierstrass.

$x + h \in E$. Per il teorema del valor medio di Lagrange (applicato all'intervallo di estremi x e $x + h$, che è interamente contenuto in E), per ogni n esiste $t_n \in (0, 1)$ tale che

$$\frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} = u'_n(x + t_n h). \quad (*)$$

Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $\sum M'_n < +\infty$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n>N} M'_n < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (**)$$

Per $h \neq 0$ tale che $x + h \in E$, si consideri la funzione

$$g(h) := \sum_{n=1}^N \left(\frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} - u'_n(x) \right).$$

Poiché le funzioni u_n sono derivabili, si ha che $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$, quindi, esiste $\delta > 0$ sufficientemente piccolo tale che $|g(h)| < \varepsilon/2$ per $0 < |h| < \delta$. Per tali h si ha, dunque, che

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum u'_n(x) \right| &= \left| g(h) + \sum_{n>N} \left(\frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} - u'_n(x) \right) \right| \\ &\stackrel{(*)}{=} \left| g(h) + \sum_{n>N} u'_n(x + t_n h) - u'_n(x) \right| \\ &\leq |g(h)| + 2 \sum_{n>N} M'_n \stackrel{(**)}{<} \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La Proposizione 5.22, il cui enunciato riportiamo qui di seguito, segue facilmente da questo Lemma.

Proposizione 5.22 Sia $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$ e sia⁸ $I := (x_0 - R, x_0 + R)$. Allora $f \in C^\infty(I)$. Inoltre, per ogni $k \geq 1$, la derivata di ordine k di f , $f^{(k)}$, è la serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza R , data da

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) (x-x_0)^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} \frac{(n+k)!}{n!} (x-x_0)^n, \quad (x \in I), \end{aligned} \quad (5.26)$$

e, in particolare,

$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k, \quad \forall k \geq 0. \quad (5.27)$$

Dimostrazione A meno di una traslazione nelle x possiamo assumere che $x_0 = 0$. È anche chiaro che basta dimostrare la proposizione nel caso $k = 1$, poiché il caso generale

⁸Se $R = +\infty$, $I = \mathbb{R}$.

segue immediatamente per iterazione (o induzione). Assumiamo quindi $x_0 = 0$ e $k = 1$, nel qual caso la (5.26) diviene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n. \quad (5.28)$$

Dalla caratterizzazione del raggio di convergenza⁹ la serie di potenze $\sum a_n n x^{n-1}$ ha lo stesso raggio di convergenza di $\sum a_n n x^n$ e poiché $\lim n^{1/n} = 1$, dal Lemma 5.19–(iii) e dalla formula di Cauchy–Hadamard per il raggio di convergenza, segue che la serie di potenze in (5.28) ha raggio di convergenza R . Per $x \in I$ la (5.28) segue, ora, dal Lemma con $u_n(x) := a_n(x - x_0)^n$, $E = (-r, r)$ e $|x| < r < R$. ■

Funzioni C^∞ non analitiche [§5.2.3]

Nel testo abbiamo visto che la funzione

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

è $C^\infty(\mathbb{R})$ e ha tutte le derivate nulle in $x = 0$. Questo implica che non è analitica in 0: se lo fosse, sarebbe identicamente nulla in un intervallo $(-\delta, \delta)$, mentre $\varphi(x) > 0$ per ogni $x > 0$. Si osservi che, in questo esempio, la serie di Taylor di φ in 0 è identicamente nulla e ha dunque raggio di convergenza infinito. La mancata analiticità non dipende quindi dalla crescita dei coefficienti, ma dal fatto che φ non coincide con la propria serie di Taylor in alcun intorno di 0.

Diamo ora un esempio di una funzione $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ la cui serie di Taylor in 0 ha raggio di convergenza nullo e che, pertanto, non è analitica in 0. Sia

$$\psi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \cos(nx).$$

Poiché, per ogni $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} n^m < +\infty,$$

dal Lemma di Weierstrass (cfr. il commento “Sulla regolarità delle serie di potenze” al §5.2.2) segue che $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre è facile verificare che i coefficienti della serie di Taylor in 0, $a_k = \psi^{(k)}(0)/k!$, sono dati da

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\sqrt{j}} j^{2k}.$$

Per $k \geq 1$, considerando nella somma il termine $j = k^2$, si ottiene

$$|a_{2k}| > \frac{e^{-k} k^{4k}}{(2k)!} \stackrel{(2.23)}{\geq} \left(\frac{e}{4}\right)^k \frac{k^{2k}}{\sqrt{2e} k}.$$

⁹Chiaramente, $\{r > 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty\} = \{r > 0 \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^{n-1} < +\infty\}$.

Pertanto

$$|a_{2k}|^{1/(2k)} > \frac{\sqrt{e}}{2} \frac{k}{(2ek)^{1/(4k)}} \longrightarrow +\infty.$$

Ne segue che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = +\infty;$$

per la caratterizzazione (*) nel commento “Una caratterizzazione di raggio di convergenza positivo” al §5.2.1, la serie di Taylor di ψ in 0 ha quindi raggio di convergenza nullo.

Serie di Taylor–Maclaurin della tangente [§5.2.3]

In questa nota dimostriamo che la tangente è analitica in 0, che la sua serie di Taylor–Maclaurin ha raggio di convergenza¹⁰ $R \geq 1$ e diamo una semplice formula ricorsiva per calcolarne i coefficienti.

Poniamo $c_0 := 1$ e definiamo ricorsivamente

$$c_n := \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{n-1} c_j c_{n-1-j}, \quad n \geq 1, \quad (c_0 := 1). \quad (*)$$

Si ha $0 < c_n \leq 1$ per ogni n : infatti, se ciò vale per gli indici minori di n , da (*) segue

$$0 < c_n \leq \frac{n}{2n+1} < 1.$$

La serie di potenze

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+1}$$

ha dunque raggio di convergenza $R \geq 1$. Derivando termine a termine e usando (*) si ottiene¹¹

$$f'(x) = 1 + f(x)^2, \quad (\forall |x| < 1), \quad f(0) = 0.$$

Anche la funzione $x \mapsto \tan x$ soddisfa lo stesso problema di Cauchy¹²; per l’unicità della soluzione segue quindi che

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

La ricorrenza dà, in particolare,

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

¹⁰In effetti, usando metodi meno elementari, si può dimostrare che il raggio di convergenza della serie di Maclaurin della tangente è $\pi/2$.

$$^{11} f(x)^2 = \left(\sum_{j \geq 0} c_j x^{2j+1} \right) \left(\sum_{k \geq 0} c_k x^{2k+1} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_j c_k x^{2(j+k+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k=n-1}} c_j c_k = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sum_{j=0}^{n-1} c_j c_{n-1-j}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (2n+1) x^{2n} = f' - 1.$$

¹² $y' = 1 + y^2$ è un’equazione differenziale a variabili separabili e ha quindi un’unica soluzione del problema di Cauchy con “dato iniziale” $y(0) = 0$; cfr. §4.6.1 *Equazioni a variabili separabili*, p. 164.

Algebra dei limiti in $\mathbb{C}$ [§5.2.4]

Come nel campo reale, anche nel campo complesso vale l'algebra dei limiti:

Se $z_n, w_n \in \mathbb{C}$, $z_n \rightarrow z_0$, $w_n \rightarrow w_0$, allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha¹³

$$\alpha z_n + \beta w_n \rightarrow \alpha z_0 + \beta w_0; \quad z_n w_n \rightarrow z_0 w_0; \quad \frac{1}{z_n} \rightarrow \frac{1}{z_0} \quad (z_0 \neq 0).$$

Le dimostrazioni sono del tutto simili al caso reale (e seguono da questo): ad esempio,

$$|(\alpha z_n + \beta w_n) - (\alpha z_0 + \beta w_0)| \leq |\alpha| |z_n - z_0| + |\beta| |w_n - w_0| \rightarrow 0,$$

dove il limite segue dal caso reale. Per il prodotto, si osservi che se $z_n \rightarrow z_0$ allora $\{z_n\}$ è limitata (ossia $\sup_n |z_n| < +\infty$), ecc.

Teorema di addizione per l'esponenziale complesso [§5.2.4]

Nel §5.2.4 abbiamo definito l'esponenziale complesso tramite la serie (assolutamente convergente su $\mathbb{C}$)

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

In questo *commento* dimostriamo – in modo diretto e indipendente dalla discussione nel §5.2.4 – il fondamentale *teorema di addizione per l'esponenziale complesso*, che asserisce che

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w), \quad \forall z, w \in \mathbb{C}. \quad (*)$$

Ricordiamo che in §2.7.1 e §5.2.3 è stato dimostrato, rispettivamente, che

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (**)$$

Dunque, il *teorema di addizione* (*) vale per $z, w \in \mathbb{R}$. Per l'estensione a $\mathbb{C}$, faremo uso del seguente

Lemma algebrico Per ogni $N \geq 1$ e per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha

$$\sum_{n=0}^N \frac{(z+w)^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^N \frac{w^j}{j!} \right) - \varepsilon_N, \quad (\dagger)$$

dove

$$\varepsilon_N = \varepsilon_N(z, w) := \sum_{k=1}^N \sum_{j=N-k+1}^N \frac{z^k}{k!} \frac{w^j}{j!}.$$

Dimostrazione Dalla formula del binomio di Newton¹⁴,

$$\sum_{n=0}^N \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

¹³Si noti che se $z_n \rightarrow z_0 \neq 0$, allora $z_n \neq 0$ definitivamente.

¹⁴Nelle identità che seguono usiamo la convenzione che $\sum_{j=m}^n a_j = 0$ se $m > n$; cfr. penultima uguaglianza nel caso $k = 0$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{0 \leq k \leq n \leq N} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^N \sum_{n=k}^N \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \sum_{j=0}^{N-k} \frac{w^j}{j!} \\
&= \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^N \frac{w^j}{j!} - \sum_{j=N-k+1}^N \frac{w^j}{j!} \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^N \frac{w^j}{j!} \right) - \sum_{k=1}^N \frac{z^k}{k!} \sum_{j=N-k+1}^N \frac{w^j}{j!} \\
&= \left(\sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^N \frac{w^j}{j!} \right) - \varepsilon_N. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Dimostrazione di (*) Dalla definizione di $\varepsilon_N(z, w)$ segue che

$$|\varepsilon_N(z, w)| \leq \varepsilon_N(|z|, |w|), \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Da (**) e da (†), con $z = x$ e $w = y$, segue che

$$\varepsilon_N(x, y) \longrightarrow 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Da questa osservazione e da (†) segue che

$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{(z+w)^n}{n!} - \left(\sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^N \frac{w^j}{j!} \right) \right| = |\varepsilon_N(z, w)| \leq \varepsilon_N(|z|, |w|) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

poiché il membro a sinistra converge a $|\exp(z+w) - \exp(z) \exp(w)|$ il teorema di addizione (*) è dimostrato. $\blacksquare$

Interno, chiusura e frontiera: semplici relazioni [§6.1.2]

Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$, l'interno $\overset{\circ}{E}$ è il più grande aperto contenuto in E , mentre la chiusura $\overline{E}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene E , il che equivale a dire

$$\overset{\circ}{E} = \bigcup_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq E}} A, \quad \overline{E} = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ E \subseteq C}} C.$$

Da queste relazioni segue che

$$(\overset{\circ}{E})^c = \left(\bigcup_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq E}} A \right)^c = \bigcap_{\substack{A \text{ aperto} \\ E^c \subseteq A^c}} A^c = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ E^c \subseteq C}} C = \overline{E^c}.$$

Da questa relazione segue poi¹⁵

$$\partial E := \overline{E} \setminus \mathring{E} = \overline{E} \cap (\mathring{E})^c = \overline{E} \cap \overline{E^c}.$$

Riassumendo, per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$, si ha

$$(\mathring{E})^c = \overline{E^c}, \quad \partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}.$$

Una dimostrazione immediata di Bolzano–Weierstrass [§6.2.1]

Una formulazione standard del teorema di Bolzano–Weierstrass asserisce che *da una successione limitata in $\mathbb{R}$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente* e, nel testo, ne abbiamo dato una dimostrazione classica basata sul metodo di bisezione. Vi è, però, una dimostrazione immediata usando il concetto di massimo limite e la proprietà che *da ogni successione $\{a_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ che abbia come limite $\overline{\lim} a_n$* (cfr. Proposizione 6.21–(i)): *da quest’ultima affermazione segue immediatamente il teorema di Bolzano–Weierstrass*¹⁶.

¹⁵Questo è l’enunciato della Proposizione 6.9.

¹⁶Ovviamente, se $\{a_n\}$ è limitata, $\overline{\lim} a_n \in \mathbb{R}$.