

AM110 – Analisi Matematica 1

Prologo §1.0 – Logica, quantificatori, insiemi, relazioni e funzioni

Gli esercizi usano liberamente $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ nel loro significato intuitivo. Lo scopo è esercitare il linguaggio logico e insiemistico del §1.0, non anticipare la costruzione formale dei sistemi numerici.

Esercizi

1. Tradurre in simboli. Scrivere usando i quantificatori: (a) ogni numero naturale è minore di qualche numero naturale; (b) esiste un numero naturale maggiore di ogni numero naturale; (c) tra due numeri razionali distinti esiste un numero razionale; (d) esiste un numero irrazionale compreso tra 1 e 2; (e) non esiste un numero razionale il cui quadrato sia 2.

2. Leggere i quantificatori. Stabilire quali affermazioni sono vere:

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m > n$,
- (b) $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : m > n$,
- (c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$,
- (d) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x + y = 0$.

3. Negare senza usare “non”. Negare:

- (a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$;
- (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \implies \exists q \in \mathbb{Q} : 0 < q < x$.

4. Dov'è l'errore? Uno studente vuole esprimere “ogni numero reale ha un razionale maggiore di lui” e scrive

$$\exists q \in \mathbb{Q} \forall x \in \mathbb{R} : q > x.$$

Che cosa ha scritto in realtà? Scrivere la formula corretta.

5. Vero o falso? Per ciascuna affermazione dare una breve giustificazione o un controesempio:

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq x$;
- (b) $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 2$;
- (c) $\exists q \in \mathbb{Q}, \quad q^2 = 2$;
- (d) $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n^2 + n$ è pari;
- (e) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y^2 > x$.

6. Chi dipende da chi? Confrontare

$$(A) \quad \forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m > n, \quad (B) \quad \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : m > n.$$

Spiegare la differenza anche a parole.

7. Implicazione e contrapposizione. Scrivere la contrapposta di “se n^2 è pari, allora n è pari” e dimostrarla.

8. Insiemi: calcolo elementare. Siano $A, B, C \subseteq X$. Stabilire quali identità sono sempre vere e, per quelle false, dare un controesempio:

- (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
- (b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
- (c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

9. Dimostrazione elemento per elemento. Dimostrare

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

10. Inclusione propria. Siano

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è multiplo di } 6\}, \quad B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è multiplo di } 3\}.$$

Determinare la relazione tra A e B e dimostrarla.

11. Una falsa cancellazione. È vero che $A \cup B = A \cup C$ implica $B = C$? Se no, dare un controesempio. E se si aggiunge l'ipotesi $A \cap B = A \cap C = \emptyset$?

12. Famiglie di insiemi. Per $n \in \mathbb{N}$, sia

$$A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}.$$

Determinare $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

13. Funzioni e quantificatori. Sia $f : A \rightarrow B$. Tradurre in formule: (a) f è iniettiva; (b) f è suriettiva; (c) f non è iniettiva; (d) f non è suriettiva.

14. Preimmagini. Sia $f : A \rightarrow B$ e siano $C, D \subseteq B$. Dimostrare direttamente dalle definizioni:

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D), \quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

15. Immagini: attenzione. Sia $f : A \rightarrow B$ e siano $E, F \subseteq A$. Dimostrare $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$. È sempre vero che $f(E \cap F) = f(E) \cap f(F)$? Se no, dare un controesempio e dire quale inclusione vale sempre.

16. Frasi da precisare. Ciascuna frase è volutamente imprecisa. Dare almeno una formulazione matematica ragionevole e stabilire se è vera: (a) “Ogni numero ha un numero più grande”; (b) “Un razionale si trova tra due reali”; (c) “Il quadrato di un numero può essere maggiore del numero”.

Soluzioni

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : n < m$. (b) $\exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : m < n$. (c) $\forall p, q \in \mathbb{Q}, p < q \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : p < r < q$. (d) $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : 1 < x < 2$. (e) $\forall q \in \mathbb{Q} : q^2 \neq 2$. La (b) è falsa; le altre sono vere.

2. (a) Vera: $m = n + 1$. (b) Falsa: dato m , prendere $n = m + 1$. (c) Vera: $y = -x$. (d) Falsa: un unico y non può soddisfare sia $0 + y = 0$ sia $1 + y = 0$.

3. (a) $\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n \leq x$. (b)

$$\exists x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } \forall q \in \mathbb{Q}, q \leq 0 \text{ o } q \geq x.$$

Si usano $\neg \forall = \exists \neg$, $\neg \exists = \forall \neg$ e $\neg(P \Rightarrow Q) \iff P \text{ e } \neg Q$.

4. La formula scritta afferma che esiste *un unico* razionale q maggiore di tutti i reali. La frase voluta è

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists q \in \mathbb{Q} : q > x.$$

5. (a) Falsa: $x = 1/2$. (b) Vera: $x = \sqrt{2}$. (c) Falsa: $\sqrt{2}$ è irrazionale. (d) Vera: $n^2 + n = n(n + 1)$, prodotto di due interi consecutivi. (e) Vera: se $x < 0$ prendere $y = 0$; se $x \geq 0$ prendere $y = x + 1$, poiché $(x + 1)^2 > x$.

6. (A) è vera: m può dipendere da n , per esempio $m = n + 1$. (B) chiede un unico m maggiore di ogni naturale ed è falsa: $n = m + 1$ la contraddice.

7. La contrapposta è: “se n è dispari, allora n^2 è dispari”. Se $n = 2k + 1$,

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

dunque n^2 è dispari.

8. (a) Vera: entrambi i membri significano $x \in A, x \notin B, x \notin C$. (b) Falsa: per esempio $A = \{1\}$, $B = \{1\}$, $C = \emptyset$. La formula corretta è

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

(c) Vera: entrambi i membri significano $x \in A, x \in B, x \notin C$.

9. Per ogni x ,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ e } (x \in B \text{ o } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ e } x \in C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

10. $A \subsetneq B$. Se $n \in A, n = 6k = 3(2k)$, quindi $n \in B$. L'inclusione è propria perché $3 \in B$ ma $3 \notin A$.

11. No: $A = \{1\}, B = \emptyset, C = \{1\}$. Con $A \cap B = A \cap C = \emptyset$, invece, sì: se $x \in B$, allora $x \in A \cup B = A \cup C$; poiché $x \notin A$, deve essere $x \in C$. Quindi $B \subseteq C$; simmetricamente $C \subseteq B$.

12. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ (con $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$). Invece $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$: se k appartenesse a tutti gli A_n , dovrebbe essere $k \geq n$ per ogni n ; prendere $n = k + 1$.

13. (a) $\forall x, x' \in A, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. (b) $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$. (c) $\exists x, x' \in A : x \neq x' \text{ e } f(x) = f(x')$. (d) $\exists y \in B \forall x \in A : f(x) \neq y$.

14.

$$x \in f^{-1}(C \cup D) \iff f(x) \in C \cup D \iff f(x) \in C \text{ o } f(x) \in D \iff x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

Per l'intersezione lo stesso argomento, sostituendo “o” con “e”.

15. $y \in f(E \cup F)$ se e solo se $y = f(x)$ per qualche $x \in E$ oppure $x \in F$; quindi $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$. Per l'intersezione l'uguaglianza è falsa in generale: sia $f : \{-1, 1\} \rightarrow \{1\}, f(x) = 1, E = \{-1\}, F = \{1\}$. Allora $f(E \cap F) = \emptyset$, mentre $f(E) \cap f(F) = \{1\}$. Vale sempre

$$f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F).$$

Se f è iniettiva, vale l'uguaglianza.

16. Possibili precisazioni: (a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y > x$, vera ($y = x + 1$). (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$, vera ma non ancora dimostrata nel corso. (c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > x$, vera ($x = 2$). Il punto è che prima di decidere vero/falso occorre precisare la frase.