

Esercizi aggiuntivi su assiomi e proprietà algebriche elementari

§§1.1.1–1.1.2

Esercizi

1. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e supponiamo che $xy = x$. Dimostrare che $x = 0$ oppure $y = 1$.
2. Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $x^2 = y^2$ se e solo se $x = y$ oppure $x = -y$.
3. Siano $0 < x < y$. Dimostrare che $x^2 < xy < y^2$.
4. Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x^2 < x$.
5. Determinare tutte le coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x + y = xy$. In particolare, mostrare che $x \neq 1$, $y \neq 1$ e riscrivere la relazione nella forma $(x - 1)(y - 1) = 1$.
6. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Trovare $x \in \mathbb{R}$ tale che $a < x < b$ e $x - a = b - x$. Dimostrare che tale x è unico.
7. Siano $x, y > 0$. Dimostrare che $x < y \iff x^2 < y^2$. Mostrare con un controesempio che l'equivalenza non vale per $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrari e formulare una versione corretta per $x, y < 0$.
8. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione $ax + b < c$, distinguendo i casi $a > 0$ e $a < 0$, e giustificando i passaggi mediante le proprietà dell'ordine.

Problemi

1. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x + y = 1$. Dimostrare che $xy \leq 1/4$ e stabilire quando vale l'uguaglianza.
2. Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $x^2 + y^2 \geq 2xy$ e stabilire quando vale l'uguaglianza. Dedurre che, se $x, y > 0$, allora

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Soluzioni

1. Da $xy = x$ segue $xy - x = 0$, cioè $x(y - 1) = 0$. Per la proprietà del prodotto nullo, $x = 0$ oppure $y - 1 = 0$, ossia $y = 1$.
2. Se $x = y$ oppure $x = -y$, allora chiaramente $x^2 = y^2$. Viceversa, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$. Quindi $x - y = 0$ oppure $x + y = 0$, ossia $x = y$ oppure $x = -y$.
3. Poiché $x > 0$, moltiplicando $x < y$ per x si ottiene $x^2 < xy$; poiché $y > 0$, moltiplicando $x < y$ per y si ottiene $xy < y^2$. Dunque $x^2 < xy < y^2$.
4. Si ha $x^2 < x \iff x(x - 1) < 0$. Il prodotto è negativo se e solo se i due fattori hanno segno opposto. Poiché $x - 1 < x$, ciò accade esattamente quando $x > 0$ e $x - 1 < 0$, ossia $0 < x < 1$.
5. Dalla relazione $x + y = xy$ segue subito che $x \neq 1$: infatti, se $x = 1$, si avrebbe $1 + y = y$, assurdo. Analogamente $y \neq 1$. Inoltre $xy - x - y = 0 \iff xy - x - y + 1 = 1$, cioè $(x - 1)(y - 1) = 1$. Quindi, assegnato un qualunque $x \neq 1$,

$$y - 1 = \frac{1}{x - 1}, \quad y = 1 + \frac{1}{x - 1}.$$

Tutte e sole le soluzioni sono pertanto

$$\left(x, 1 + \frac{1}{x - 1}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1.$$

6. La condizione $x - a = b - x$ equivale a $2x = a + b$, quindi necessariamente $x = (a + b)/2$. Poiché $a < b$,

$$2a < a + b < 2b,$$

e, dividendo per $2 > 0$,

$$a < \frac{a + b}{2} < b.$$

Dunque tale x esiste; l'equazione $2x = a + b$ mostra anche che è unico.

7. Se $0 < x < y$, dall'Esercizio 3 segue $x^2 < y^2$. Viceversa, supponiamo $x, y > 0$ e $x^2 < y^2$. Se fosse $x \geq y$, allora, moltiplicando $x \geq y$ per numeri positivi, si avrebbe

$$x^2 \geq xy \geq y^2,$$

contraddizione. Quindi $x < y$.

L'equivalenza non vale su tutto $\mathbb{R}$: ad esempio, $-2 < -1$ ma $(-2)^2 > (-1)^2$. Se invece $x, y < 0$, vale $x < y \iff x^2 > y^2$.

8. Da $ax + b < c$ segue $ax < c - b$. Se $a > 0$, dividendo per a il verso non cambia:

$$x < \frac{c - b}{a}.$$

Se $a < 0$, dividendo per a il verso si inverte:

$$x > \frac{c - b}{a}.$$

Soluzioni dei problemi

1. Poiché

$$(x - y)^2 \geq 0,$$

si ha

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0.$$

Ma

$$1 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

quindi

$$1 - 4xy = (x - y)^2 \geq 0.$$

Ne segue

$$xy \leq \frac{1}{4}.$$

L'uguaglianza vale se e solo se $(x - y)^2 = 0$, cioè $x = y$; insieme a $x + y = 1$, questo dà

$$x = y = \frac{1}{2}.$$

2. Si ha

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0,$$

quindi

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

L'uguaglianza vale se e solo se $x = y$.

Se $x, y > 0$, dividendo per $xy > 0$ si ottiene

$$\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \geq 2,$$

ossia

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$