Esercizio: intervalli annidati

Siano $a < b$ numeri reali. Denotiamo con

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

l'*intervallo chiuso di estremi* a *e* b. Siano

$$I_n = [a_n, b_n], \qquad n \in \mathbb{N},$$

intervalli chiusi non vuoti *annidati*, ossia

$$I_{n+1} \subseteq I_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo

$$A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad B := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Dimostrare che

(i) $\forall n \leq m$, $a_n \leq a_m$ e $b_m \leq b_n$, ossia la successione $\{a_n\}$ è crescente e la successione $\{b_n\}$ è decrescente.

(ii) $A \leq B$, ossia che $a_n \leq b_m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ e dedurne che $\alpha := \sup A \leq \beta := \inf B$.

(iii) Concludere che $\alpha, \beta \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e quindi $\alpha, \beta \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Soluzioni

(i) Se $n \leq m$, per l'annidamento si ha

$$I_m \subseteq I_n.$$

In particolare $a_m, b_m \in I_n = [a_n, b_n]$, e quindi

$$a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n.$$

Ne segue che $\{a_n\}$ è crescente e $\{b_n\}$ è decrescente.

(ii) Fissati $n, m \in \mathbb{N}$, supponiamo dapprima $n \leq m$. Dal punto precedente,

$$a_n \leq a_m \leq b_m.$$

Se invece $m \leq n$, allora

$$a_n \leq b_n \leq b_m.$$

Dunque

$$a_n \leq b_m, \qquad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

ossia $A \leq B$.

Per l'Osservazione 1.71–(iv) del testo, da $A \leq B$ segue

$$\sup A \leq \inf B.$$

Pertanto, con $\alpha := \sup A$ e $\beta := \inf B$,

$$\alpha \leq \beta.$$

(iii) Per definizione di estremo superiore e inferiore,

$$a_n \leq \alpha, \qquad \beta \leq b_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Insieme a $\alpha \leq \beta$ otteniamo

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi

$$\alpha, \beta \in [a_n, b_n] = I_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e pertanto

$$\alpha, \beta \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$