Primo Esonero – 16/11/2026

Nome, Cognome (STAMPATELLO) e **matricola**: _____ **OFA** ☐

Per superare la prova è necessario ottenere almeno 25 punti nel primo esercizio.
Motivare sempre le risposte! Scrivere le soluzioni dell'Es. 1 su questo foglio (in ordine).

Es 1 [Pt 40] (i) [10pt] Dare la definizione di estremo superiore e di massimo di un insieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Determinare estremo estremo superiore ed eventuale massimo, dandone la dimostrazione, dell'insieme $A = \left\{ \dfrac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

(ii) [10pt] Determinare estremo inferiore e superiore ed eventuali minimo e massimo dell'insieme $B = \{x^3 : -2 \leq x < 3\}$, dandone la dimostrazione.

(iii) [10pt] Dimostrare per induzione che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \frac{n+1}{2}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(iv) [10pt] Dare la definizione di $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ e verificarla nel caso $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{1+x^4}$.

Es 2 [Pt 20] (i) [10pt] Sia $a_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{n+1}$. Determinare $\lim_{n\to+\infty} a_n$ e, dato un arbitrario intorno V del limite, determinare esplicitamente $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in V$ per ogni $n \geq N$.

(ii) [10pt] Sia $f(x) = \big(\{x\} + x\big)^2 + 1$. Dire se esiste $\lim_{x\to 1} f(x)$, dando dimostrazione della risposta.

Es 3 [Pt 10] Usando l'algebra dei limiti, si determinino i seguenti limiti (giustificando i passaggi):

(i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x}+x}{3x+\{x\}}$, (ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{[\sqrt{n}]+2n}{3n-\sqrt{n}}$.

Es 4 [Pt 15] Determinare punti interni, isolati e d'accumulazione (in $\mathbb{R}^*$) per l'insieme $E = \left\{ 2 + \dfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup (-1, 0]$.

Es 5 [Pt 15] Usando la definizione, dimostrare che $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$.