Seconda simulazione – Primo Esonero

Soluzioni sintetiche

Es 1.

(i) Per un insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$, un numero $m \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $m \leq x$ per ogni $x \in A$. L'estremo inferiore $\inf A$ è il massimo dei minoranti di A. Il minimo di A, se esiste, è un elemento $a \in A$ tale che $a \leq x$ per ogni $x \in A$.

Per $A = (-2, 3]$ si ha

$$\inf A = -2, \qquad \min A \text{ non esiste.}$$

Infatti -2 è un minorante di A. Se $m > -2$, allora, posto ad esempio $x = (-2+m)/2$, si ha $-2 < x < m$, dunque m non è un minorante. Quindi $\inf A = -2$. Poiché $-2 \notin A$, il minimo non esiste.

(ii) Per

$$B = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

si ha

$$\sup B = 1, \qquad \max B \text{ non esiste.}$$

Infatti $1 - 1/n < 1$ per ogni n, quindi 1 è un maggiorante. Se $M < 1$, scegliendo n tale che $n > 1/(1-M)$ si ha

$$1 - \frac{1}{n} > M,$$

perciò M non è un maggiorante. Dunque $\sup B = 1$. Inoltre $1 \notin B$, quindi non esiste il massimo.

(iii) Il più piccolo valore è

$$\boxed{N = 4}.$$

Infatti per $n = 3$ si ha $2^3 = 8 < 9 = 3^2$, mentre per $n = 4$ vale $2^4 = 4^2$. Supponiamo ora che, per un certo $n \geq 4$,

$$2^n \geq n^2.$$

Allora

$$2^{n+1} = 2\,2^n \geq 2n^2 \geq (n+1)^2,$$

poiché

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 > 0 \qquad (n \geq 4).$$

Per induzione la disuguaglianza vale per ogni $n \geq 4$.

(iv) Dire che $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - 1| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon.$$

Nel caso $f(x) = |x-1|^{1/2}$ basta scegliere

$$\delta = \varepsilon^2.$$

Infatti, se $0 < |x-1| < \delta$, allora

$$|f(x)| = |x-1|^{1/2} < \delta^{1/2} = \varepsilon.$$

Es 2.

(i) Per $x \neq 0$,

$$\frac{x^2}{|x|} = |x|,$$

quindi il limite è 0. Dalla definizione: dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $\delta = \varepsilon$. Se $0 < |x| < \delta$, allora

$$\left| \frac{x^2}{|x|} \right| = |x| < \varepsilon.$$

(ii) Il limite è 1. Infatti

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n+1}-1\right| = \frac{|(-1)^n-1|}{n+1} \le \frac{2}{n+1}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $N \in \mathbb{N}$ tale che $N > 2/\varepsilon$. Se $n \ge N$, allora

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n+1}-1\right| \le \frac{2}{n+1} < \varepsilon.$$

Es 3.

(i) Per $x \to -\infty$ si ha definitivamente $|x| = -x$, quindi

$$\frac{|x|+2x}{x-\sqrt{|x|}} = \frac{x}{x-\sqrt{-x}} = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{-x}}{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{-x}}} \longrightarrow 1.$$

(ii) Dividendo numeratore e denominatore per n^2,

$$\frac{2n^2+(-1)^n n}{n^2+3} = \frac{2+(-1)^n/n}{1+3/n^2} \longrightarrow 2,$$

poiché $|(-1)^n/n| \le 1/n \to 0$.

Es 4.

Per

$$E = \left\{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup (2,3)$$

si ha

$$E^\circ = (2,3),$$

$$\mathcal{I}E = \left\{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

e

$$\mathcal{D}^*E = \{0\} \cup [2,3].$$

Infatti ogni punto di $(2,3)$ è interno; nessun $1/n$ lo è. I punti $1/n$ sono isolati, mentre $1/n \to 0$, quindi 0 è punto d'accumulazione. Ogni punto di $[2,3]$ è punto d'accumulazione di $(2,3)$, inclusi gli estremi 2 e 3. Non vi sono altri punti d'accumulazione; inoltre E è limitato, quindi $\pm\infty \notin \mathcal{D}^*E$.

Es 5.

Si ha

$$\left|\frac{x}{1+x}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-1}{2(1+x)}\right| = \frac{|x-1|}{2|1+x|}.$$

Imponiamo anzitutto $|x-1| < 1$: allora $x > 0$, dunque $|1+x| > 1$. Pertanto

$$\left|\frac{x}{1+x}-\frac{1}{2}\right| < \frac{|x-1|}{2}.$$

È quindi sufficiente scegliere

$$\boxed{\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}}.$$

Se $|x-1| < \delta$, allora

$$\left|\frac{x}{1+x}-\frac{1}{2}\right| < \frac{|x-1|}{2} < \frac{\delta}{2} \le \varepsilon.$$