Es 1 [Pt 40]

(i) [10pt] Ricordiamo che, per un insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$, un numero $M \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $a \le M$ per ogni $a \in A$. Un numero $s \in \mathbb{R}$ è l'*estremo superiore* di A se è il minimo dei maggioranti di A; equivalentemente,

$$a \le s \quad \forall a \in A, \qquad \text{e} \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : \ s - \varepsilon < a.$$

Il *massimo* di A è invece un elemento $m \in A$ tale che $a \le m$ per ogni $a \in A$.

Per

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

si ha $\frac{n}{n+1} < 1$ per ogni n, dunque 1 è un maggiorante. Se $\varepsilon > 0$, per la proprietà archimedea scegliamo n tale che $n + 1 > 1/\varepsilon$. Allora

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \varepsilon.$$

Quindi $\sup A = 1$. Poiché $1 \notin A$, l'insieme A non ha massimo.

(ii) [10pt] La funzione $x \mapsto x^3$ è strettamente crescente. Per $-2 \le x < 3$ si ha quindi

$$-8 = (-2)^3 \le x^3 < 27 = 3^3.$$

Ne segue che -8 è il minimo di B e dunque anche $\inf B = -8$.

Inoltre 27 è un maggiorante di B. Per verificare che è l'estremo superiore, sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo

$$0 < h < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{27}\right\}, \qquad x = 3 - h.$$

Allora $-2 \le x < 3$ e

$$27 - x^3 = 27 - (3-h)^3 = 27h - 9h^2 + h^3 < 27h < \varepsilon.$$

Quindi $x^3 > 27 - \varepsilon$, e dunque $\sup B = 27$. Poiché $x < 3$ per ogni x ammesso nella definizione di B, si ha sempre $x^3 < 27$; pertanto $27 \notin B$ e B non ha massimo.

In conclusione,

$$\boxed{\inf B = \min B = -8, \qquad \sup B = 27, \qquad \max B \text{ non esiste.}}$$

(iii) [10pt] Poniamo

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Dimostriamo per induzione che

$$H_n \le \frac{n+1}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Per $n = 1$ si ha

$$H_1 = 1 = \frac{1+1}{2}.$$

Supponiamo ora che, per un certo $n \ge 1$,

$$H_n \le \frac{n+1}{2}.$$

Allora

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} \le \frac{n+1}{2} + \frac{1}{n+1}.$$

Poiché $n \ge 1$, si ha $n + 1 \ge 2$ e quindi

$$\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2}.$$

Pertanto

$$H_{n+1} \le \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2},$$

che è precisamente la tesi per $n + 1$. Per il principio di induzione,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \frac{n+1}{2} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.}$$

(iv) [10pt] La definizione è

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 0 \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ 0 < |x - 2| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Nel nostro caso

$$\left|\frac{(x-2)^2}{1+x^4}\right| = \frac{|x-2|^2}{1+x^4} \leq |x-2|^2,$$

perché $1+x^4 \geq 1$. Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo

$$\delta = \sqrt{\varepsilon}.$$

Se $0 < |x-2| < \delta$, allora

$$|f(x)| \leq |x-2|^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

Pertanto $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$.

Es 2 [Pt 20]

(i) [10pt] Si ha

$$a_n - 3 = \frac{3n+(-1)^n}{n+1} - 3 = \frac{(-1)^n - 3}{n+1},$$

e quindi

$$|a_n - 3| \leq \frac{4}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Dunque $a_n \to 3$.

Verifichiamo ora la definizione nella forma richiesta. Sia V un arbitrario intorno di 3. Esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$(3-\varepsilon, 3+\varepsilon) \subseteq V.$$

Poniamo, ad esempio,

$$N = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1,$$

dove $[\,\cdot\,]$ denota la parte intera. Se $n \geq N$, allora $n+1 > 4/\varepsilon$ e quindi

$$|a_n - 3| \leq \frac{4}{n+1} < \varepsilon.$$

Pertanto $a_n \in (3-\varepsilon, 3+\varepsilon) \subseteq V$ per ogni $n \geq N$.

(ii) [10pt] Il limite non esiste. Dimostriamolo direttamente dalla definizione. Per $0 < x < 1$ si ha $\{x\} = x$, mentre per $1 < x < 2$ si ha $\{x\} = x - 1$. Pertanto, se $0 < h < 1$,

$$f(1-h) = \big(2-2h\big)^2 + 1 = 5 - 8h + 4h^2,$$

mentre

$$f(1+h) = \big(1+2h\big)^2 + 1 = 2 + 4h + 4h^2.$$

Supponiamo per assurdo che esista $L = \lim_{x\to 1} f(x)$. Applicando la definizione con $\varepsilon = 1/2$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \frac{1}{2}.$$

Scegliamo $0 < h < \min\{\delta, 1/8\}$. Allora sia $1-h$ sia $1+h$ soddisfano la condizione precedente, per cui

$$|f(1-h) - f(1+h)| \leq |f(1-h) - L| + |f(1+h) - L| < 1.$$

D'altra parte,

$$f(1-h) - f(1+h) = 3 - 12h > \frac{3}{2},$$

poiché $h < 1/8$: contraddizione. Quindi $\lim_{x\to 1} f(x)$ non esiste.

Es 3 [Pt 10]

(i) Per $x \to -\infty$,

$$\sqrt{x^4 + 2x} = x^2\sqrt{1 + \frac{2}{x^3}},$$

e dunque

$$\frac{\sqrt{x^4+2x} + x}{3x + \{x\}} = x\,\frac{\sqrt{1+2/x^3} + 1/x}{3 + \{x\}/x}.$$

Poiché $0 \leq \{x\} < 1$, si ha $\{x\}/x \to 0$; inoltre $1/x \to 0$ e $2/x^3 \to 0$. Pertanto

$$\frac{\sqrt{1+2/x^3} + 1/x}{3 + \{x\}/x} \longrightarrow \frac{1}{3} > 0.$$

Essendo $x \to -\infty$, segue

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x}+x}{3x+\{x\}} = -\infty.}$$

(ii) Poiché

$$0 \le [\sqrt{n}] \le \sqrt{n},$$

si ha

$$0 \le \frac{[\sqrt{n}]}{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$$

Dividendo numeratore e denominatore per n,

$$\frac{[\sqrt{n}]+2n}{3n-\sqrt{n}} = \frac{[\sqrt{n}]/n+2}{3-1/\sqrt{n}} \longrightarrow \frac{2}{3}.$$

Quindi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{[\sqrt{n}]+2n}{3n-\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.}$$

Es 4 [Pt 15]

Poniamo

$$S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}\,, \qquad x_n := 2 + \frac{(-1)^n}{n}\,.$$

Gli elementi di S sono tutti distinti; i termini con n dispari tendono a 2 da sinistra e quelli con n pari tendono a 2 da destra. Quindi 2 è l'unico punto d'accumulazione di S, e ogni punto di S è isolato: per ogni punto x_n, l'intervallo $I_n := (x_n - 1/(3n^4), x_n + 1/(3n^4)$ interseca A solo in x_n.

Per l'intervallo $(-1, 0]$, i punti interni sono esattamente quelli di $(-1, 0)$ (per ogni $x \in (-1, 0)$ si può prendere lo stesso intorno $I = (0, 1) \subset A$) e i punti d'accumulazione sono tutti quelli di $[-1, 0]$ (ossia oltre $(0, 1)$ i punti 0 e 1 che sono chiaramente d'accumulazione: ad esempio, $1/n \to 0$ e $1 - 1/n \to 1$). Nessun punto di $(-1, 0]$ è isolato.

I due pezzi sono separati tra loro (infatti $S \subset [1, 5/2]$), e E è limitato; dunque $\pm\infty$ non sono punti d'accumulazione. Pertanto, in conclusione:

$$\boxed{E^\circ = (-1, 0),}$$

$$\boxed{\mathcal{I}E = S,}$$

$$\boxed{\mathcal{D}^* E = [-1, 0] \cup \{2\}.}$$

In particolare $\mathcal{D}E = [-1, 0] \cup \{2\}$.

Es 5 [Pt 15]

Dobbiamo dimostrare, secondo la definizione, che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per $x \ge 0$,

$$0 < |x - 4| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\sqrt{x} - 2| < \varepsilon.$$

Usiamo l'identità

$$|\sqrt{x} - 2| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}.$$

Poiché $x \ge 0$, si ha $\sqrt{x} + 2 \ge 2$, e quindi

$$|\sqrt{x} - 2| \le \frac{|x-4|}{2}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo

$$\delta = 2\varepsilon.$$

Se $0 < |x - 4| < \delta$, allora

$$|\sqrt{x} - 2| \le \frac{|x-4|}{2} < \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

Pertanto

$$\boxed{\lim_{x\to4} \sqrt{x} = 2.}$$