

Simulazione Primo Esonero – Soluzioni

28/10/2026

Es 1.

(i) Sia $x > 0$. Se $y \leq z$, allora $z - y \geq 0$; poichè il prodotto di numeri non negativi è non negativo,

$$x(z - y) \geq 0,$$

e quindi $xy \leq xz$.

Viceversa, supponiamo $xy \leq xz$. Se fosse $y > z$, avremmo $y - z > 0$ e, poichè $x > 0$,

$$x(y - z) > 0,$$

ossia $xy > xz$, assurdo. Dunque $y \leq z$.

(ii) Cerchiamo il più piccolo N tale che $2^n \geq 10n$ per ogni $n \geq N$. Si ha

$$2^5 = 32 < 50, \quad 2^6 = 64 \geq 60,$$

quindi necessariamente $N \geq 6$. Dimostriamo per induzione che la disuguaglianza vale per ogni $n \geq 6$. Il caso $n = 6$ è verificato. Se $2^n \geq 10n$ con $n \geq 6$, allora

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 20n \geq 10(n+1),$$

poichè $n \geq 1$. Pertanto il più piccolo valore è

$$\boxed{N = 6}.$$

(iii) Sia $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto. Un numero $M \in E$ è il *massimo* di E se $x \leq M$ per ogni $x \in E$. Un numero $s \in \mathbb{R}$ è l'*estremo superiore* di E se: (a) $x \leq s$ per ogni $x \in E$; (b) per ogni $t < s$ esiste $x \in E$ tale che $t < x$.

Per $A = [0, 1)$ si ha

$$\sup A = 1,$$

perchè 1 è un maggiorante e, se $t < 1$, esiste $x \in [0, 1)$ con $t < x < 1$ (ad esempio, se $t \geq 0$, $x = (t+1)/2$; se $t < 0$, basta $x = 0$). Non esiste $\max A$, poichè $1 \notin A$ e, per ogni $x < 1$, esiste un elemento di A maggiore di x .

Per

$$B = \left\{ 2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

si ha

$$\sup B = 2.$$

Infatti $2 - 1/n < 2$ per ogni n , quindi 2 è un maggiorante. Se $t < 2$, scegliendo $n > 1/(2-t)$ si ha $2 - 1/n > t$. Non esiste massimo, poichè

$$2 - \frac{1}{n+1} > 2 - \frac{1}{n}$$

per ogni n .

(iv) Per definizione,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon.$$

Per $f(x) = |x - 2|^{1/3}$, dato $\varepsilon > 0$, scegliamo

$$\delta = \varepsilon^3.$$

Allora $0 < |x - 2| < \delta$ implica

$$|f(x)| = |x - 2|^{1/3} < \delta^{1/3} = \varepsilon.$$

Quindi il limite vale 0.

Es 2.

(i) Poiche' $0 \leq x^+ \leq |x|$,

$$0 \leq \frac{x^+}{\sqrt{|x|}} \leq \sqrt{|x|} \quad (x \neq 0).$$

Ne segue che il limite e' 0. Verifichiamolo dalla definizione. Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $\delta = \varepsilon^2$. Se $0 < |x| < \delta$, allora

$$0 \leq \frac{x^+}{\sqrt{|x|}} \leq \sqrt{|x|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Dunque

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^+}{\sqrt{|x|}} = 0}.$$

(ii) Il limite e' 1. Infatti, per $n > 1$,

$$\left| \frac{n^2 + (-1)^n n}{n^2 - 1} - 1 \right| = \left| \frac{(-1)^n n + 1}{n^2 - 1} \right| \leq \frac{n + 1}{(n - 1)(n + 1)} = \frac{1}{n - 1}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $N \in \mathbb{N}$ tale che $N > 1 + 1/\varepsilon$. Allora, per $n \geq N$,

$$\left| \frac{n^2 + (-1)^n n}{n^2 - 1} - 1 \right| \leq \frac{1}{n - 1} < \varepsilon.$$

Pertanto

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + (-1)^n n}{n^2 - 1} = 1}.$$

Es 3.

(i) Per $x < 0$ si ha $|x| = -x$, dunque

$$\frac{|x| - 3x}{x + \sqrt{|x|}} = \frac{-4x}{x + \sqrt{-x}} = \frac{-4}{1 + \frac{\sqrt{-x}}{x}}.$$

Inoltre

$$\frac{\sqrt{-x}}{x} = -\frac{1}{\sqrt{-x}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty),$$

per cui

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| - 3x}{x + \sqrt{|x|}} = -4}.$$

(ii) Poiche' $n^4/3^n \rightarrow 0$ e $n^{10}/2^n \rightarrow 0$,

$$3^n - n^4 \sim 3^n, \quad n^{10} + 2^n \sim 2^n.$$

Pertanto

$$\frac{3^n - n^4}{n^{10} + 2^n} \sim \left(\frac{3}{2}\right)^n \rightarrow +\infty,$$

e quindi

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - n^4}{n^{10} + 2^n} = +\infty}.$$

Es 4.

Poniamo

$$E = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup (1, 2).$$

Se n e' pari, $(-1)^n + 1/n = 1 + 1/n \in (1, 2)$; quindi questi termini non aggiungono punti all'intervallo. Se n e' dispari,

$$(-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n},$$

e tali punti tendono a -1 .

Ne segue che

$$\boxed{E^\circ = (1, 2]}.$$

I punti isolati sono precisamente quelli della successione con indice dispari:

$$\boxed{\mathcal{I}E = \left\{ -1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, \ n \text{ dispari} \right\}}.$$

Infine ogni punto di $[1, 2]$ e' punto d'accumulazione di $(1, 2)$, e -1 e' l'unico punto d'accumulazione della parte discreta. Quindi

$$\boxed{\mathcal{D}E = \{-1\} \cup [1, 2]}.$$

(Anche in $\mathbb{R}^*$ non compaiono altri punti d'accumulazione, poiche' E e' limitato.)

Es 5.

Per $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sqrt{x}}{1+x} - \frac{1}{2} \right| &= \frac{|2\sqrt{x} - 1 - x|}{2(1+x)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{2(1+x)}. \end{aligned}$$

Se inoltre $|x - 1| < 1$, allora $x > 0$ e

$$|\sqrt{x} - 1| = \frac{|x - 1|}{\sqrt{x} + 1} \leq |x - 1|.$$

Pertanto

$$\left| \frac{\sqrt{x}}{1+x} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{|x - 1|^2}{2}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, basta dunque scegliere

$$\boxed{\delta = \min\{1, \sqrt{2\varepsilon}\}}.$$

Infatti, se $|x - 1| < \delta$, allora

$$\left| \frac{\sqrt{x}}{1+x} - \frac{1}{2} \right| < \frac{\delta^2}{2} \leq \varepsilon.$$