Seconda simulazione – Primo Esonero

Nome, Cognome (STAMPATELLO): _____ Matricola: _____

Per superare la prova è necessario ottenere almeno 25 punti nel primo esercizio.
Motivare sempre le risposte! Scrivere le soluzioni dell'Es. 1 su questo foglio (in ordine!).

Es 1 [Pt 40]

(i) [10pt] Dare la definizione di estremo inferiore e di minimo di un insieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e determinarli, dandone la dimostrazione, per l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < x \leq 1\}.$$

(ii) [10pt] Determinare l'estremo superiore e l'eventuale massimo dell'insieme

$$B = \left\{1 - \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\},$$

dandone la dimostrazione.

(iii) [10pt] Determinare il più piccolo $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$2^n \geq n^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq N,$$

e dimostrare l'affermazione per induzione.

(iv) [10pt] Dare la definizione di

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

e verificarla nel caso $f(x) = |x-1|^{1/2}$.

Es 2 [Pt 20] Determinare, se esiste, il limite e dimostrare l'affermazione fatta usando la definizione di limite, nei seguenti casi:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n + (-1)^n}{n+1}.$$

Es 3 [Pt 10] Usando l'algebra dei limiti, si determinino i seguenti limiti (giustificando i passaggi):

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{|x| + 2x}{x - \sqrt{|x|}}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2 + (-1)^n n}{n^2 + 3}.$$

Es 4 [Pt 15] Determinare punti interni, isolati e d'accumulazione (in $\mathbb{R}^*$) per l'insieme

$$E = \left\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup (2, 3).$$

Es 5 [Pt 15] Dato $\varepsilon > 0$, trovare $\delta > 0$ tale che, se $|x-1| < \delta$, allora

$$\left| \frac{x}{1+x} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$