Un Teorema di de Hôpital–Bernoulli

Teorema. *Siano f e g due funzioni derivabili in (a,b) tali che $g' \neq 0$ e*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty \tag{1}$$

e

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \ . \tag{2}$$

Allora si ha che

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \ . \tag{3}$$

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Dalle ipotesi segue che esiste $a < x_0 < b$ tale che[1]

$$f(x) > 0, \qquad g(x) > 0 \qquad \forall\, x \in (a, x_0] \tag{4}$$

e

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < L + \frac{\varepsilon}{2} \ , \qquad \forall\, \xi \in (a, x_0]. \tag{5}$$

Da (1) segue ora che esiste $0 < x_1 < x_0$ tale che

$$f(x) > 2f(x_0) \overset{(4)}{>} 0 \ , \qquad g(x) > 2g(x_0) \overset{(4)}{>} 0 \ , \quad \forall\, x \in (a, x_1) \ . \tag{6}$$

Grazie a tale reazione possiamo definire la seguente funzione continua (infatti, differenziabile)

$$h : (a, x_1) \to (0, +\infty) \ , \qquad h(x) := \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \ . \tag{7}$$

Tale h soddisfa le seguenti proprietà

$$\frac{1}{2} < h(x) < 2 \quad \text{e} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ , \qquad \forall\, x \in (a, x_1) \ . \tag{8}$$

Inoltre, da (1), si ha anche che

$$\lim_{x\to a} h(x) = 1 \ , \tag{9}$$

da cui segue anche che

$$\lim_{x\to a} \Big(L - \frac{\varepsilon}{2}\Big) h(x) = L - \frac{\varepsilon}{2} \ , \qquad \lim_{x\to a} \Big(L + \frac{\varepsilon}{2}\Big) h(x) = L + \frac{\varepsilon}{2} \ . \tag{10}$$

Quindi, per la definizione di limite[2], si ha che esiste $a < x_2 < x_1$ tale che

$$L - \varepsilon < \Big(L - \frac{\varepsilon}{2}\Big)\ h(x) \ , \qquad \Big(L + \frac{\varepsilon}{2}\Big) h(x) < L + \varepsilon, \qquad \forall\, x \in (a, x_2) \ . \tag{11}$$

Sia ora $x \in (a, x_2)$ e si osservi che dal teorema di Cauchy segue che esiste $\xi_0 \in (x, x_0)$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{(8)}{=} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \ \cdot h(x) = \frac{f'(\xi_0)}{g'(\xi_0)} \ \cdot h(x) \ . \tag{12}$$

Dunque, per $x \in (a, x_2)$, si ha[3]

$$L - \varepsilon \overset{(11)}{<} \Big(L - \frac{\varepsilon}{2}\Big)\ h(x) \overset{(5)}{<} \frac{f'(\xi_0)}{g'(\xi_0)}\ h(x) \overset{(12)}{=} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{(5)}{<} \Big(L + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\ h(x) \overset{(11)}{<} L + \varepsilon \ ,$$

il che implica (definizione di limite) la (3). ∎

---

[1] La (4) segue da (1) (per il teorema di permanenza del segno) e la (5) da (2) (dalla definizione di limite). In generale, i due intorni destri di a potrebbero essere diversi ma è sempre possibile prendere il più piccolo dei due e quindi un unico x_0 (che naturalmente dipende da ε).

[2] Si applichi la definizione di limite, rispettivamente, a $F(x) = \Big(L - \frac{\varepsilon}{2}\Big) h(x)$ e $G(x) = \Big(L + \frac{\varepsilon}{2}\Big) h(x)$ con limite ℓ uguale, rispettivamente, a $L - \frac{\varepsilon}{2}$ e $L + \frac{\varepsilon}{2}$ e "numero positivo a piacere" uguale a $\varepsilon/2$.

[3] Si ricordi che $h(x) > 0$: vedi (8).