APPELLO A – *AM120 – CL Matematica (AA 2016/17 – L. Chierchia). 26/6/2017*

Parte 1. Definizioni, esempi, enunciati di teoremi/proposizioni, brevi dimostrazioni (24 punti)

Es 1 [Pt. 6] Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat sui punti critici di una funzione.

Es 2 [Pt. 6] Dare la definizione di funzione convessa. Dare la definizione di bi-rapporto incrementale. Enunciare la caratterizzazione di funzioni convesse di classe C^1.

Es 3 [Pt. 6] Definire la primitiva di una funzione (specificandone la regolarità necessaria). Enunciare il teorema della media integrale ed il teorema fondamentale del calcolo.

Es 4 [Pt. 6] Enunciare la formula di Stirling. Qual è l'origine della costante $\sqrt{\pi}$ che appare nella formula?

Parte 2. Svolgimento di esercizi assegnati (56 punti)

Es 5 [Pt. 12] Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}+x^3 \operatorname{sen}(1/x)}{x^2}$ [Si consiglia l'uso della formula di Taylor].

Es 6 [Pt. 16] Studiare la funzione $\dfrac{1}{x} + \log x$.

Parte riservata al grafico (indicare sul grafico le informazioni rilevanti)

Es 7 [Pt. 14] Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^2}dx$.

Es 8 [Pt. 14] Discutere la converge dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{(x^x-1)}dx$.

Parte 3. Esercizio originale (20 punti)

Es 9 [Pt. 20] Sia $I_k := \big[0, 1+\frac{1}{k}\big)$ e $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\chi_{I_k}(x)$. (i) Trovare una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}$ tale che $\varphi_n(x) \le f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. (ii) Trovare una successione di funzioni semplici $\{\psi_n\}$ tale che $f(x) \le \psi_n(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. (iii) Discutere l'integrabilità di f secondo Riemann. (iv) Assumendo che f sia Riemann integrabile, calcolare l'integrale di f. (v) Siano $a_k, b_k > 0$ e sia $I_k := \big[0, 1+a_k\big)$ e $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{I_k}(x)$. Trovare condizioni sufficienti su a_k e b_k affinché f sia integrabile secondo Riemann; discutere condizioni necessarie.

Soluzione: Si noti che $f = \chi_{[0,1)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\chi_{[1,1+1/k)}$; dunque, si può prendere:

$\varphi_n = \chi_{[0,1)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\chi_{[1,1+1/k)}$ e $\psi_n = \chi_{[0,1)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\chi_{[1,1+1/k)} + \chi_{[1,1+1/n)}$.

Poiché $\displaystyle\int (\psi_n - \varphi_n) = 1/n$, f è Riemann integrabile e $\displaystyle\int f = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{1}{k}$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{[0,1+a_k)}$ sia Riemann integrabile è che $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k < \infty$.