Definizione di primitiva

(13/3/2017)

Definizione. *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si chiama* **primitiva** *(o "una primitiva") di f una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che se $F' = f$ su I. L'insieme di tutte le primitive di una funzione f si chiama anche* **integrale indefinito** *di f e si denota con $\displaystyle\int f$ o con $\displaystyle\int f(x)dx$.*

Osservazione 1. (i) Vedremo in seguito che esistono sempre primitive di funzioni continue su intervalli, mentre non è sempre possibile esprimere tali primitive in termini delle funzioni elementari (come, ad esempio, nel caso $f(x) = e^{-x^2}$).

(ii) Se F e G sono due primitive di f sull'intervallo I, allora $F' = f = G'$ e quindi $(F-G)' \equiv 0$ su I e, dalla Proposizione 8.2 cap. 4 di [G2], segue che $F = G + c$ per un opportuno $c \in \mathbb{R}$. Dunque: *se F è una primitiva di f,*

$$\int f = \{F(x) + c \,|\, c \in \mathbb{R}\} \ . \tag{1}$$

(iii) Di solito, con abuso di notazione, $\displaystyle\int f$ denota una qualche primitiva di f; ad esempio, scriveremo

$$\int x = x^2/2$$

al posto della notazione corretta (ma più pesante)

$$\int x = \Big\{ \frac{x^2}{2} + c \,|\, c \in \mathbb{R} \Big\} \ .$$

(iv) Dalla linearità della derivazione segue immediatamente che se a e b sono numeri reali e f e g sono funzioni continue su un intervallo, allora

$$\int (af + bg) = a\int f + b\int g \tag{2}$$

e tale uguaglianza equivale a dire che: *se F è una primitiva di f e G una primitiva di g allora $aF + bG$ è una primitiva di $af + bg$* (infatti, $(aF + bG)' = aF' + bG' = af + bg$).

Dalle formule di derivazione delle funzioni elementari segue immediatamente la seguente tabella di primitive F di funzioni $f : I \to \mathbb{R}$.

$f(x) = F'(x)$	I	$F(x)$
$x^n, \quad (n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\})$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}\, x^{n+1}$
$x^\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})$	$\{x > 0\}$	$\frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$(-\infty, 0);\ (0, +\infty)$	$\log\lvert x\rvert$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan x$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x},$	$\Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) + \pi\mathbb{Z}$	$\tan x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x},$	$\Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) + \pi\mathbb{Z}$	$-\operatorname{cotan} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$\{\lvert x\rvert < 1\}$	$\operatorname{arcsen} x$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$\{\lvert x\rvert < 1\}$	$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}},$	$x \in \mathbb{R}$	$\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}},$	$\{\lvert x\rvert > 1\}$	$\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$

Note: (i) $\arctan x$ denota il "ramo principale dell'arco tangente" ossia la funzione inversa di $y \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big) \to \tan y$.

(ii): $\arcsin x$ denota il "ramo principale dell'arco seno" ossia la funzione inversa di $y \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big) \to \operatorname{sen} y$.

(ii): $\arccos x$ denota il "ramo principale dell'arco coseno" ossia la funzione inversa di $y \in \big(0, \pi\big) \to \cos y$.

(iii): $\cosh^{-1} x$ denota il "ramo principale dell'arco coseno iperbolico " ossia la funzione inversa di $y \in \big(0, +\infty\big) \to \cosh y$.

Es 1. Si traccino i grafici dei rami principali delle funzioni trigonometriche e iperboliche inverse. Nella tabella qui sopra possiamo scegliere altri rami delle funzioni trigonometriche e iperboliche inverse?

Es 2. Si dimostri che $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.

Es 3. Si dimostri che $\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ e che $-\log(x + \sqrt{x^2-1})$ è la funzione inversa di $y \in \big(-\infty, 0\big) \to \cosh y$.

Es 4. Si dimostri che se $F : (-a, a) \to \mathbb{R}$ (con $a > 0$ o $a = \infty$) è una funzione pari (rispettivamente, dispari) allora F' è dispari (rispettivamente, spari).

Es 5. Si dimostri che se $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ (con $a > 0$ o $a = \infty$) è una funzione dispari e F è una sua primitiva, allora F è pari.

Es 6. Si dimostri che se $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ (con $a > 0$ o $a = \infty$) è una funzione pari e F è una sua primitiva, allora esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ tale che $F + c$ è dispari.