L'integrale di Riemann generalizzato

Definizione 0.1 *Siano $a < b$ elementi di $\mathbb{R}^*$ e sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è integrabile in senso di Riemann generalizzato su (a, b) se:*

(i) *per ogni $a < \alpha < \beta < b$, f è integrabile su $[\alpha, \beta)$;*

(ii) *per un fissato $x_0 \in (a, b)$ esistono, finiti, i limiti*

$$A := \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^{x_0} f \ , \qquad\qquad B := \lim_{\beta \to b-} \int_{x_0}^{\beta} f \ .$$

In tal caso poniamo

$$\int_a^b f := A + B. \tag{1}$$

Osservazione 0.2 (i) Poiché, per ogni x_0 e x_1 in (a, b),

$$\int_\alpha^{x_1} f = \int_\alpha^{x_0} f + \int_{x_0}^{x_1} f \ , \qquad\qquad \int_{x_1}^{\beta} f = \int_{x_0}^{\beta} f + \int_{x_1}^{x_0} f = \int_{x_0}^{\beta} f - \int_{x_0}^{x_1} f$$

si vede subito che la definizione è ben posta, ossia che la condizione in (ii) non dipende dalla particolare scelta di x_0 e che il valore in (1) è indipendente da x_0.

(ii) Se f è integrabile (in senso standard) su $[a, b)$ allora lo è anche in senso generalizzato ed il valore degli integrali (standard e generalizzato) coincidono. Infatti, se $x_0, \beta \in (a, b)$,

$$\int_{x_0}^{\beta} f = \int_{x_0}^{b} f + \int_b^{\beta} f = \int_{x_0}^{b} f - \int_\beta^b f$$

e[1]

$$\lim_{\beta \to b-} \Big| \int_\beta^b f \Big| \le \lim_{\beta \to b-} (\sup_{(a,b)} |f|) \int_\beta^b 1 = \lim_{\beta \to b-} (\sup_{(a,b)} |f|)(b - \beta) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{\beta \to b-} \int_{x_0}^{\beta} f = \int_{x_0}^{b} f \ .$$

Analogamente,

$$\lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^{x_0} f = \int_a^{x_0} f \ .$$

Dunque, l'integrale in senso generalizzato estende la nozione standard di integrale di Riemann ad intervalli aperti eventualmente non limitati e a funzioni eventualmente non limitate.

(iii) È facile vedere che (**Es 1**) *l'insieme delle funzioni integrabili (in senso generalizzato) su (a, b) è uno spazio vettoriale ma non un'algebra.*

(iv) È anche facile vedere che (**Es 2**) *se f è integrabile su $[\alpha, \beta)$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$ e $|f|$ è integrabile su (a, b) allora lo è anche f e si ha*

$$\Big| \int_a^b f \Big| \le \int_a^b |f| \ .$$

[1] Essendo f integrabile su $[a, b)$, è limitata su $[a, b)$, ossia $\sup_{(a,b)} |f| < \infty$.