Derivazione di funzioni composte C^k

Definizione 1 *Un* **monomio** $m(x) = m(x_1, ..., x_n)$ *in* n *variabili reali* $x_i \in \mathbb{R}$ *(o* $x \in \mathbb{R}^n$*),è il prodotto di* n *potenze delle variabili*[1] $x_i \in \mathbb{R}$*:*

$$m(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i} = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \ , \qquad x_i \in \mathbb{R} \ , \ k_i \in \mathbb{N}_0 \ ;$$

in tale espressione $x_i^0 := 1$*. Il* **grado** *del monomio* m *è dato da* $k_1 + \cdots + k_n$*.*
Un **polinomio** *su* $\mathbb{R}^n$ *è una combinazione lineare finita a coefficienti reali di monomi. Il grado del polinomio è dato dal più alto grado dei monomi (con coefficiente diverso da zero) che lo formano.*

Ad esempio, un polinomio $P(x, y, z)$ in tre variabili reali x, y e z di grado 5 è:

$$P(x, y, z) = -\sqrt{2} + x^2 y - 7xyz^3 \ . \tag{1}$$

Esempi di polinomi di grado $3n$ in x_1, ..., x_n sono:

$$Q(x) = x_1 x_n - (x_1 \cdots x_n)^3 \ , \qquad R(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} 2^i x_i \Big)^3 \ ; \tag{2}$$

il più generale polinomio in due variabili di grado 2 è dato da

$$a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2 \ . \tag{3}$$

Dato un polinomio $P(x)$ in n variabili $x \in \mathbb{R}^n$, possiamo considerare le n funzioni di una variabile reale date da $x_i \in \mathbb{R} \mapsto P(x_1, ..., x_i, ..., x_n) \in \mathbb{R}$; tali funzioni sono ovviamente derivabili rispetto a x_i e denoteremo tali derivate con $\partial_{x_i} P$ e le derivate di ordine j con $\partial_{x_i}^j P$
Ad esempio, se P è il polinomio in (1), $\partial_y P = x^2 - 7xz^3$, $\partial_z P = -21xyz^2$, $\partial_x^3 P = 0$; se Q è il polinomio in (2) e $n \geq 2$, $\partial_{x_n} Q = x_1 - 3(x_1 \cdots x_{i-1})^4 x_n^3$; se R è il polinomio in (2), $\partial_{x_j} R = 3 \cdot 2^j \Big(\sum_{i=1}^{n} 2^i x_i \Big)^2$.

Proposizione 2 *Sia* $n \in \mathbb{N}$ *e* I *e* J *due intervalli di* $\mathbb{R}$*; sia* $g \in C^n(I, J)$ *e* $f \in C^n(J, \mathbb{R})$*. Allora* $f \circ g \in C^n(I, \mathbb{R})$ *e le derivate* $D^k(f \circ g)$*, con* $1 \leq k \leq n$ *sono date da:*

$$D^k(f \circ g) = P_k(g', ..., g^{(k)}, f' \circ g, ..., f^{(k)} \circ g) \ , \tag{4}$$

dove P_k *è un polinomio di grado* $k+1$ *in* $2k$ *variabili* $x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_k$ *definito dalle seguenti formule ricorsive:*

$$\begin{aligned} P_1(x_1, y_1) \quad &:= \quad x_1 y_1 \ , \\ P_{k+1}(x_1, ..., x_{k+1}, y_1, ..., y_{k+1}) \quad &:= \quad \sum_{i=1}^{k} (\partial_{x_i} P_k) \ \cdot x_{i+1} + (\partial_{y_i} P_k) \cdot x_1 y_{i+1} \ , \quad (1 \leq k \leq n-1) \ . \end{aligned} \tag{5}$$

La dimostrazione (per induzione) è basata sui seguenti esercizi:

[1] Si ricordi che $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Esercizio 1. Se $x \in I \subseteq \mathbb{R} \to F_i(x)$ sono n funzioni derivabili (con I intervallo) allora

$$(F_1 \cdots F_n)' = \sum_{i=1}^{n} F_1 \cdots F_i' \cdots F_n \ .$$

Esercizio 2. Se $P(x) = P(x_1, ..., x_n)$ è un monomio in n variabili e $x \in I \subset \mathbb{R} \to F_i(x)$ sono n funzioni derivabili allora

$$\big(P(F_1, ..., F_n)\big)' = \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} P)(F_1, ..., F_n) \cdot F_i' \ .$$

La stessa formula vare per un polinomio $P(x)$ in n variabili.

Esercizio 3. Dimostrare la Proposizione 2.