1^{o} **ESONERO** – *AM120 – CL Matematica (AA 2016/17 – L. Chierchia). 14/4/2017*

Parte 1. Definizioni, esempi, enunciati di teoremi/proposizioni, brevi dimostrazioni (20 punti)

Es 1 [Pt. 5] Enunciare i teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange.

Es 2 [Pt. 5] Dare la definizione di stretta convessità e fornire un criterio di stretta convessità per funzioni C^1 e C^2.

Es 3 [Pt. 5] Enunciare e dimostrare la "regola di integrazione per parti". Illustrare tale regola con un esempio.

Es 4 [Pt. 5] Enunciare il teorema sulla derivabilità della funzione inversa ed illustrarla con un esempio.

Parte 2. Svolgimento di esercizi assegnati (60 punti)

Es 5 [Pt. 8] Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+2}dx$.

Es 6 [Pt. 10] Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\log x)\ dx$.

Es 7 [Pt. 12] Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

Es 8 [Pt. 12] Fra tutti i rettangoli di area uguale ad 1 qual è quello con diagonale minima. Esiste di tali rettangoli quello di diagonale massima? (motivare la risposta)

Es 9 [Pt. 10] Studiare il massimo/minimo assoluto/relativo della funzione $f : x \in [0,\infty) \mapsto f(x) = x^n e^{-x}$ al variare di $n \in \mathbb{N}_0$.

Es 10 [Pt. 8] Studiare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$.

Parte 3. Esercizi originali (20 punti)

Es 11* [Pt. 10] Studiare la convessità di $\max\{\log^2 x\,,\,x\}$ su $(0,+\infty)$.

Es 12 [Pt. 10] (i): Una funzione convessa, in generale, non ha minimo: dare un esempio di funzione convessa senza minimo. (ii): Sotto quale ulteriore ipotesi una funzione convessa ha sempre minimo? (motivare la risposta).

Soluzione Es 11 Studiando la funzione $g(x) := x - \log^2 x$ si ha che $g(0+) = -\infty$, $g(1) = 1 > 0$ e $g'(x) = (x - 2\log x)/x > 0$ per $x > 0$ (infatti la funzione $x - 2\log x$ ha un minimo assoluto in $x = 2$ dove vale $2 - 2\log 2 > 0$); dunque esiste un unico $x_0 \in (0,1)$ tale che $g(x_0) = 0$ e $g(x) < 0$ per $x < x_0$ e $g(x) > 0$ per $x > x_0$ ossia la funzione $\lambda(x) := \max\{\log^2 x\,,\,x\}$ coincide con $\log^2 x$ per $0 < x \le x_0$ e con x per $x \ge x_0$. Ora, $(\log^2 x)'' = 2(1 - \log x)/x^2 > 0$ per $0 < x < e$ e quindi $\log^2 x$ è strettamente convessa in $(0,e)$. La funzione x è convessa su $\mathbb{R}$.
Dunque la funzione λ è convessa in $(0,x_0) \cup (x_0,\infty)$; d'altra parte in un intorno sufficientemente piccolo di x_0, λ è convessa essendo il massimo di due funzione convesse. Alternativamente si può usare la caratterizzazione tramite rette d'appoggio che sono le tangenti al grafico in $x_0 \neq x > 0$ e in x_0 si può prendere la retta orizzontale $y = x_0$.

Soluzione Es 12 x su $(0,1)$ è convessa ma non ha minimo; oppure e^x su $\mathbb{R}$. Se f è convessa ed ha una retta d'appoggio orizzontale allora ha minimo (segue immediatamente dalla definizione di retta d'appoggio); in particolare se esiste x_0 tale che $f'(x_0) = 0$.