2$^{\text{o}}$ **ESONERO** – *AM120 – CL Matematica (AA 2016/17 – L. Chierchia). 29/5/2017*

Parte 1. Definizioni, esempi, enunciati di teoremi/proposizioni, brevi dimostrazioni (24 punti)

Es 1 [Pt. 6] Scrivere, specificando le ipotesi necessarie, la formula d Taylor ad ordine n con resti di Legrange e resto integrale. Illustrare con la funzione $(1+x)^\alpha$.

Es 2 [Pt. 6] Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.

Es 3 [Pt. 6] Dare la definizione di integrale di Riemann. Dimostrare che la funzione χ_E con $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ non è integrabile secondo Riemann.

Es 4 [Pt. 6] Dare la definizione di lunghezze di un grafico di una funzione. Illustrare la definizione con un segmento e dimostrare che la la lunghezza della circonferenza di raggio r è $2\pi r$.

Parte 2. Svolgimento di esercizi assegnati (56 punti)

Es 5 [Pt. 16] Studiare la funzione $f(x) = x - 2\arctan x$.

Parte riservata al grafico (indicare sul grafico le informazioni rilevanti)

Es 6 [Pt. 10] Calcolare il polinomio di Taylor di grado 5 in $x_0 = 0$ di $f(x) = \big(e^x - 1\big)^2$.

Es 7 [Pt. 10] Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1-\cos 2x)}{\log \tan 2x}$.

Es 8 [Pt. 10] Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ è convergente ed eventualmente calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} \sin x \; dx$.

Es 9 [Pt. 10] Fare uno sketch del grafico di $|x| - \operatorname{sen} x$. Discutere la convergenza di $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{|x|}}{|x| - \operatorname{sen} x} dx$.

Parte 3. Esercizio originale (20 punti)

Es 10 [Pt. 20] Sia $I_n := \big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{n}\big)$ e $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty (\operatorname{sen} n)\ \chi_{I_n}(x)$.

(i) Calcolare $\displaystyle\int_{1/2}^2 f(x)dx$. **(ii)** Discutere la convergenza di $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$.

Soluzione:

(i) Poiché $I_1 = (1/2, 1)$ e $I_k \cap I_1 = \emptyset$ per $k \geq 1$, si ha

$$\int_{1/2}^2 f(x)dx = \int_{1/2}^1 f(x)dx = \int_{1/2}^1 (\operatorname{sen} 1)\ \chi_{I_1}(x)dx = (\operatorname{sen} 1)/2 \; .$$

(ii) L'integrale converge assolutamente:

$$\int_0^\infty |f(x)|dx = \int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \chi_{I_n}(x)dx < \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 \chi_{I_n}(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} = 1 \; .$$