Funzioni semplici: definizioni ed esercizi

(30/5/17)

Definizione 1 (i) Dato un insieme A, la funzione caratteristica o indicatrice di A, è la funzione

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in A^c \end{cases} \tag{1}$$

(ii) Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si chiama *supporto di* f e si denota con $\operatorname{supp}(f)$ la chiusura dell'insieme su cui $f \neq 0$:

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}} \tag{2}$$

(iii) Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotiamo con D_f il suo *insieme di discontinuità*, ossia

$$D_f := \{x \in A \mid f \text{ non è continua in } x\} \tag{3}$$

(iv) Denotiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ limitate e a supporto compatto.

(v) Denotiamo con $\mathcal{E}$ la famiglia di tutti gli intervalli finiti, non vuoti, chiusi a sinistra ed aperti a destra[1]:

$$\mathcal{E} := \{[a,b) \mid -\infty < a < b < +\infty\} .$$

(vi) Una funzione $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si chiama *funzione semplice* se esistono n intervalli $I_i \in \mathcal{E}$ a due a due disgiunti e n numeri reali c_i tali che

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i}(x) . \tag{4}$$

L'insieme delle funzioni semplici si denota con $\mathtt{S}$.

Osservazione 2 (i) Dunque, una funzione semplice è una funzione che assume valore costante su un numero finito di intervalli disgiunti chiusi a sinistra ed aperti a destra e che vale 0 al di fuori di tali intervalli.

(ii) Il supporto di una funzione semplice è dato dall'unione degli intervalli su cui la funzione assume un valore non zero: se $s \in \mathtt{S}$ è come in (4),

$$\operatorname{supp}(s) = \overline{\bigcup_{i:c_i \neq 0} I_i} .$$

Essendo tale insieme chiuso e limitato, è compatto; inoltre, le funzioni semplici sono limitate: se $s \in \mathtt{S}$ è come in (4),

$$m \leq s(x) \leq M \ , \ \forall\, x \in \mathbb{R} \ , \qquad \text{dove} \quad m = \min\{c_1, ..., c_n\} \ , \ M = \max\{c_1, ..., c_n\}; \tag{5}$$

dunque $\mathtt{S} \subset \mathcal{S}$.

(iii) La "rappresentazione" (4) di una funzione semplice non è unica: ad esempio $s(x) = 0 \cdot \chi_{[0,n)}(x)$ sono infinite rappresentazioni della funzione semplice s identicamente uguale a 0.

Es 1 Dimostrare che *le funzioni semplici sono continue da destra in ogni punto*: se $s \in \mathtt{S}$

$$s(x+) = s(x) \ , \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} .$$

[Suggerimento: si distinguano i casi in cui $x \in I_i$ per qualche i dai casi in cui $x \notin I_i$ per ogni i.]

---

[1]Si noti che l'insieme vuoto NON appartiene ad $\mathcal{E}$.

Osservazione 3 Dunque, *le funzioni semplici sono funzioni continue a destra a supporto compatto che assumono un numero finito di valori.*

Es 2 Sia $s \in \mathtt{S}$ e sia D_s il suo insieme di discontinuità.
(i) Dimostrare che $D_s \neq \emptyset$ se e solo se $s \not\equiv 0$ (non è identicamente uguale a 0).
(ii) Sia $s \in \mathtt{S}$ e $s \not\equiv 0$; sia $D_s = \{x_1 < \cdots < x_n\}$ il suo insieme di discontinuità. Dimostrare che $s(x) = 0$ per ogni $x < x_1$ e per ogni $x \geq x_n$ e dimostrare che

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \chi_{[x_i, x_{i+1})}(x) \ , \qquad \text{con } c_i := s(x_i) \ . \tag{6}$$

Dimostrare che $c_1 \neq 0$ e $c_{n-1} \neq 0$, e che se $c_i = 0$ con $1 < i < n-1$, allora $c_{i\pm 1} \neq 0$.

Definizione 4 Una rappresentazione di una funzione semplice come in (4) si chiama *una rappresentazione ammissibile di s*; la rappresentazione (unica) di s come in (6) si chiama *la rappresentazione canonica di s.*

Es 3 Dimostrare che se $I, J \in \mathcal{E}$ e $I \cap J \neq \emptyset$, allora $I \cap J$ e $I \cup J$ appartengono a $\mathcal{E}$.

Es 4 (i) Dimostrare che $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$, per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$.
(ii) Dimostrare che $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ e che $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$.

Il prossimo esercizio è particolarmente importante.

Es 5 Siano s_1 e s_2 due funzioni semplici. Dimostrare che esistono n intervalli $I_i \in \mathcal{E}$ a due a due disgiunti e $2n$ numeri reali c_i e d_i tali che

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i} \ , \qquad s_2 = \sum_{i=1}^{n} d_i \chi_{I_i} \ , \tag{7}$$

ossia, che è possibile trovare rappresentazioni ammissibili di s_1 e s_2 *con gli stessi intervalli* I_i.
[Suggerimento: se $s_1(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i^{(1)} \chi_{I_i^{(1)}}(x)$ e $s_2(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i^{(2)} \chi_{I_i^{(2)}}(x)$ si scelgano gli I_i come le intersezioni non vuote di $I_j^{(1)}$ e $I_k^{(2)}$....]

Nei prossimi esercizi si faccia uso dell'Esercizio 5.

Es 6 Si dimostri che $\mathtt{S}$ *e* $\mathcal{S}$ *sono algebre (di dimensione infinita)* ossia sono spazi vettoriali chiusi rispetto al prodotto.

Es 7 Si dimostri che se $s, s_i \in \mathtt{S}$ allora $\max\{s_1, s_2\}$, $\min\{s_1, s_2\}$, $s_\pm := \max\{\pm s, 0\}$ e $|s|$ appartengono a $\mathtt{S}$.

Definizione 5 *Sia $s \in \mathtt{S}$ come in (4). Si chiama integrale (di Riemann) di s il numero reale*[2]

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \, \mathrm{mis}(I_i) \ .$$

Tale numero si denota con uno dei seguenti simboli: $\int_{\mathbb{R}} s$, $\int_{\mathbb{R}} s(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} s(x)dx$, $\mathcal{I}(s)$.

Es 8 Dimostrare che il valore dell'integrale di $s \in \mathtt{S}$ *non dipende* dalla rappresentazione di s.

[2]Se I è un intervallo limitato si definisce *misura o lunghezza di* I il numero positivo $\sup(I) - \inf(I)$.