Integrale di Riemann generalizzato (esercizi)

Es 1 (i) Sia $f \geq 0$ continua e limitata su $[a, b)$. Dimostrare che

$$\int_a^b f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = 0 \;\; \forall\, x \in [a, b)$$

(ii) Dimostrare che tale relazione non è in generale vera se si assume che f sia integrabile su $[a, b)$ (si trovi un esempio di una funzione integrabile su $[0, 1)$ non identicamente nulla ma con integrale su $[0, 1)$ nullo).

Es 2 (i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile su $[0, T)$ e periodica di periodo T, allora, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f = \int_0^T f \ .$$

(ii) Sotto quali condizioni una tale funzione f è integrabile su $(0, +\infty)$?

Es 3 Siano $c_n \in \mathbb{R}$ e sia $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{[n,n+1)}(x)$. Dimostrare:

(i) $f(x) = c_{[x]}$ per ogni $x \geq 1$ e $f(x) = 0$ se $x < 1$ (come al solito $[\cdot]$ denota parte intera).

(ii) $|f(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \chi_{[n,n+1)}(x)$; $f^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \chi_{[n,n+1)}(x)$.

(iii) f è integrabile su $\mathbb{R}$ se e solo se la serie $\sum c_n$ converge.

Es 4 Dimostrare che: *se f è integrabile su $[\alpha, \beta)$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$ e $|f|$ è integrabile su (a, b), allora f è integrabile su (a, b) e*

$$\Big|\int_a^b f\Big| \leq \int_a^b |f| \ .$$

Es 5 Calcolare $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x}$, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.

Es 6 Sia $f \in C(\mathbb{R})$ periodica di periodo T e non negativa. Dimostrare che $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx = +\infty$.
È tale affermazione vera se si assume $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile su $[0, T)$, periodica di periodo T e non negativa?

Es 7 Siano f e g due funzioni positive definite su $[x_0, b)$, integrabili su $[x_0, \beta)$, per ogni $x_0 < \beta < b$ e tali che $\lim_{x \to b} f(x)/g(x) = L > 0$ (L numero reale). Dimostrare che f è integrabile su $[x_0, b)$ se e solo se lo è g.
Dimostrare il risultato analogo in (a, x_0).

Es 8 (i) Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx > 0$.

(ii)* Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx > 1$.