L'integrale di Gauss

Teorema 1 (Valore dell'integrale di Gauss)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ . \tag{1}$$

Nel corso della dimostrazione useremo i seguenti lemmi.

Lemma 2 *Se g è una funzione limitata su A e $f_n \to f$ uniformemente*[1] *su A, allora $gf_n \to gf$ uniformemente su A*

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$ e sia $M = \sup_A |g|$. Poiché $f_n \to f$ uniformemente su A, per definizione di convergenza uniforme, esiste N tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\ , \qquad \forall\ n \geq N\ , \qquad \forall\ x \in A\ ..$$

Si avrà allora, per $n \geq N$ e per $x \in A$

$$|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| = |g(x)|\ |f_n(x) - f(x)| \leq M|f_n(x) - f(x)| < M\ \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Lemma 3 *Se f_n e f sono funzioni integrabili su $[a, b)$ e $f_n \to f$ uniformemente su $[a, b)$ allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx\ .$$

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$ e sia N tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\ , \qquad \forall\ x \in [a, b)\ , \qquad \forall\ n \geq N\ .$$

Dunque, se $n \geq N$, si ha

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon\ . \qquad \blacksquare$$

Lemma 4 *Per ogni $y \in \mathbb{R}$ si definisca*

$$H(y) := \int_0^1 \frac{e^{y(1+t^2)}}{1+t^2}\ dt\ . \tag{2}$$

Allora

$$H'(y) := \int_0^1 e^{y(1+t^2)}\ dt\ . \tag{3}$$

[1] Si ricorda che $f_n \to f$ uniformente su A se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$ e per ogni $x \in A$.

Dimostrazione Siano $0 < |h_n| < 1$ tali che $\lim h_n = 0$ e si definisca

$$f_n(t) := \frac{e^{h_n(1+t^2)} - 1}{h_n} \ . \tag{4}$$

Per la formula di Taylor in $x = 0$ al secondo ordine (con resto di Lagrange) per[2] e^x, esiste $0 < s < 1$ tale che

$$e^{h_n(1+t^2)} - 1 = h_n(1+t^2) + \frac{e^{s\ h_n(1+t^2)}}{2} \Big(h_n(1+t^2)\Big)^2 \ .$$

Dunque, per ogni $t \in [0,1]$,

$$|f_n(t) - (1+t^2)| = \frac{e^{s\ h_n(1+t^2)}}{2} \Big| h_n(1+t^2)^2 \Big| \le |h_n| \ 2e^2 \ ,$$

il che mostra che f_n converge uniformemente a $(1+t^2)$ su $[0,1]$. Dal Lemma 2 segue che $\frac{e^{y(1+t^2)}}{1+t^2} f_n(t)$ converge a $e^{y(1+t^2)}$ uniformemente su $[0,1]$. Quindi, per il Lemma 3, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(y+h_n) - H(y)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{y(1+t^2)}}{1+t^2} f_n(t)\ dt = \int_0^1 e^{y(1+t^2)}\ dt \ .$$

Dall'arbitrarietà della successione $\{h_n\}$ (e dal "Teorema ponte") segue la tesi. ∎

Dimostrazione (del Teorema 1) Si definisca

$$F(x) := \int_0^x e^{-\xi^2}\ d\xi \ , \qquad G(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\ dt \ . \tag{5}$$

Dunque $G(x) = H(-x^2)$ e, per il Lemma,

$$\begin{aligned} G'(x) &= -2xH'(-x^2) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\ dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2}\ d(xt) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-\xi^2}\ d\xi \\ &= -2e^{-x^2} F(x) = -2F'(x)F(x) = -(F^2)'(x) \ . \end{aligned}$$

Tale relazione è equivalente a $(F^2 + G)' = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi $F^2 + G$ è una funzione costante. Dunque

$$F^2(x) + G(x) = F(0)^2 + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\ dt = \operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} 0 = \frac{\pi}{4} \ . \tag{6}$$

Si osservi che[3]

$$0 \le G(x) \le e^{-x^2} \ ,$$

dunque, prendendo il limite per $x \to \infty$ in (6) si ottiene

$$\Big(\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx\Big)^2 = \frac{\pi}{4} \ ,$$

ovvero la tesi. ∎

---

[2]Cioè: $\forall\ x\ \exists\ 0 < s < 1$ tale che $e^x = 1 + x + \frac{e^{sx}}{2}\ x^2$.

[3]L'integrando, nella definizione di G è positivo e maggiorato da e^{-x^2}.