Numerabilità, insiemi di misura nulla e il Teorema di Vitali–Lebesgue

(30 maggio, 2017)

1 Insiemi finiti e numerabili

Definizione 1 (a) *Dati due insiemi A e B, diremo che $A \cong B$ ("A è equipotente a B") se esiste un'applicazione biunivoca (o una "biiezione") tra A e*[1] *B.*

(b) *Dato $n \in \mathbb{N}$ denotiamo l'insieme dei primi n numeri naturali con*

$$\mathbb{F}_n := \{k \in \mathbb{N} \big| \ 1 \le k \le n\} \ .$$

Un insieme F si dice **finito** *se $F \cong \mathbb{F}_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Un insieme si dice* **infinito** *se non è finito.*

(c) *Un insieme A si dice numerabile se $A \cong \mathbb{N}$.*

(i) Si può dimostrare che:

Un insieme finito non può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria[2].

Dunque, se F è finito *esiste un unico* n tale che $F \cong \mathbb{F}_n$. Tale n si chiama **la cardinalità** di F e scriveremo $n = \#F$.
Se F è finito e $j : F \to \mathbb{F}_n$ è una biiezione, possiamo scrivere $F = \{a_1, ..., a_n\}$ con $a_k = j^{-1}(k)$; si noti che $a_k \neq a_i$ se $k \neq i$.
Analogamente, se A è numerabile e se $j : A \to \mathbb{N}$ è una biiezione, A può essere scritto come $A = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $a_k = j^{-1}(k)$; si noti che $a_k \neq a_i$ se $k \neq i$. In altri termini un insieme numerabile può essere rappresentato come una successione iniettiva.

(ii) Quanto affermato in (i) non è vero per insiemi infiniti. Ad esempio $j : n \in \mathbb{N} \mapsto n+1 \in \mathbb{N}$ è una applicazione iniettiva ma non suriettiva. Infatti, si può dimostrare che gli insiemi infiniti sono caratterizzati da questa proprietà:

A è infinito se e solo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

(iii) $\mathbb{Z}$ è numerabile; infatti l'applicazione $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita come

$$\begin{aligned} &j(n) = -2n \ , && n < 0 \\ &j(0) = 0 \ , && \\ &j(n) = 2n + 1 \ , && n > 0 \end{aligned}$$

è biunivoca.

[1] Ossia, esiste $j : A \to B$ iniettiva e suriettiva. **Es1** Dimostrare che $\cong$ è una relazione d'equivalenza

[2] Ossia, se A è finito e $j : A \to A$ è una applicazione iniettiva allora j è anche suriettiva.

(iv) *Un'unione numerabile di insiemi finiti a due a due disgiunti è numerabile.*
Infatti, siano F_k, $k \in \mathbb{N}$, insiemi finiti tali che $F_k \cap F_i = \emptyset$ se $k \neq i$ e sia $n_k \in \mathbb{N}$ la cardinalità di F_k. Da (i) segue che $F_1 = \{a_1^{(1)}, ..., a_{n_1}^{(1)}\}$, $F_2 = \{a_1^{(2)}, ..., a_{n_2}^{(2)}\}$, e, in generale, $F_k = \{a_1^{(k)}, ..., a_{n_k}^{(k)}\}$. Sia $N_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$ e definiamo

$$\begin{aligned}
&a_i := a_i^{(1)} \ , \qquad && 1 \leq i \leq N_1 = n_1 \\
&a_i := a_i^{(2)} \ , && N_1 + 1 \leq i \leq N_2 \\
&\ldots\ldots. \\
&a_i := a_i^{(k)} \ , && N_{k-1} + 1 \leq i \leq N_k \\
&\ldots\ldots.
\end{aligned}$$

Da tale definizione segue che $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k = \{a_i \big| \ i \in \mathbb{N}\}$ e che $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$, il che equiavle all'asserto.

(v) $\mathbb{Q}$ è *numerabile.*
Infatti, sia $F_0 := E_0 := \{0\}$ e per $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n := \{r = p/q \big| \ q \in \mathbb{N} \ , p \in \mathbb{Z} \ , \ |p| \leq n \ , \ q \leq n\} \ , \qquad F_n := E_n \backslash E_{n-1} .$$

È facile vedere che[3]:

$$E_n \subset E_{n+1} \ , \quad F_n \cap F_m = \emptyset \text{ se } n \neq m \ , \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} F_n = \mathbb{Q} \ .$$

Dunque, da (iv) segue che $\mathbb{Q}$ è numerabile.

(vi) *L'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.*
Diamo l'idea della dimostrazione nel caso gli insiemi siano a due a due disgiunti (che è anche il caso più interessante). Siano A_k, $k \in \mathbb{N}$ insiemi numerabili a due a due disgiunti. Da (i) segue che[4] $A_k = \{a_j^{(k)} \big| \ j \in \mathbb{N}\}$ e che $a_i^{(k)} \neq a_j^{(h)}$ per ogni $(k, i) \neq (h, j)$. Ora, per $q \geq 1$, poniamo $F_q := \{a_i^{(k)} \big| \ k + i = q\}$; ossia: $F_2 = \{a_1^{(1)}\}$, $F_3 = \{a_2^{(1)}, a_1^{(2)}\}$, $F_4 = \{a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}\}$, etc. Chiaramente gli F_q sono a due a due disgiunti e sono insiemi finiti (di cardinalità uguale a $q-1$) e la loro unione coincide con quella degli A_k. Dunque l'asserto deriva da (iv).

2 Insiemi di misura nulla

Definizione 2 *Un insieme $Q \subseteq \mathbb{R}$ si dice* **di misura nulla** *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia numerabile di intervalli aperti e limitati $\{I_k \big| \ k \in \mathbb{N}\}$ tali che*

$$\text{(i)} \qquad Q \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \text{mis}(I_k) < \varepsilon \ .$$

[3] **Es 2.**

[4] In effetti qui c'è un punto delicato, in quanto, oltre all'osservazione elementare (i) si sta anche facendo uso di un assioma logico detto "assioma della scelta numerabile"; ("axiom of countable choice") vedi, ad esempio, https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_countable_choice.

Chiaramente, un insieme finito di $\mathbb{R}$ è di misura nulla: se $F = \{x_1 < \cdots < x_n\}$ con $x_i \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ basta prendere $I_k = (x_k - \varepsilon/(2n), x_k + \varepsilon/(2n))$.

Ma anche un qualunque sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$ è di misura nulla (ad esempio, $\mathbb{Q}$ è di misura nulla). Infatti se $A = \{x_k \in \mathbb{R} \big| \ k \in \mathbb{N}\}$, con $x_k \neq x_j$ se $k \neq i$, è un qualunque sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$ e se $\varepsilon > 0$ basta prendere[5]

$$I_k = \left(x_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) .$$

Es 4 Dimostrare che:

(i) Un sottoinsieme di un insieme di misura nulla è di misura nulla.

(ii) Una unione numerabile di insiemi di misura nulla è di misura nulla.

3 Il Teorema di Vitali–Lebesgue

Il seguente risultato dà una caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann.

Teorema 3 *Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione limitata; f è integrabile secondo Riemann se e solo se il suo insieme di dicontinuità $D_f := \{x \in [a, b)$ tale che f non è continua in $x\}$ è un insieme di misura nulla.*

[5] **Es 3.**