- <u>**Programma AM120 (aa 16/17 - Prof. Chierchia)**</u>

- Definizione di **derivata** e sua interpretazione geometrica e cinematica. Esempi (derivata di x^n, e^x, log x, sen x, cos x, sh x, ch x). Linearità della derivata. Una funzione derivabile in y è continua in y. Esempi di funzioni non derivabili (|x| e segno(x) in x=0).
- Regole di derivazione: derivata del prodotto, reciproco, composizione e funzione inversa.
- **Relazione tra derivata e monotonia**. <u>Teorema di Fermat sui punti critici</u>. <u>Teoremi di Rolle</u>, <u>Cauchy</u> e <u>Lagrange</u>. Corollari del teorema di Lagrange.
- <u>Teoremi di l'Hôpital-Bernoulli</u> (incluso il caso con punto di accumulazione in $\pm\infty$ tramite il cambio di variabile x=1/y e il caso "infinito su infinito").
- Definizione di **primitiva**. Esempi. Elenco delle primitive elementari. Le funzioni circolari e le funioni iperboliche inverse.
- Enunciato del teorema fondamentale dell'algebra e sue conseguenze sulla fattorizzazione complessa e reale (nel caso di polinomi a coefficienti reali). Primitive di funzioni razionali.
- Calcolo di primitive per parti ("integrazione per parti") e per sostituzione ("cambio di variabile nell'integrazione").
- **Derivate successive**: le funzioni $C^k(I)$ e $C^\infty(I)$; $|x|x^k$ è $C^k(\mathbf{R})$ ma non $C^{k+1}(\mathbf{R})$.
  Il prododotto di funzioni derivabili k volte è derivabile k volte; formula per la derivata di ordine k. La composizione di funzioni derivabili k volte è derivabile k volte.
- La funzione f(x):=exp(-1/x) per x>0 e f(x):=0 per $x \leq 0$ è una funzione $C^\infty(\mathbf{R})$.
- **Derivata seconda** e condizioni necessarie e sufficienti per **max e min locali**.
- Definizione analitica di **retta e segmento**. Definizione di **convessità**. Esempio: |x| è convessa su **R**. Condizione necessaria in termini di rapporto incrementale. Una funzione convessa ammette derivate destre e sinistre ed è, quindi, continua.
- ll bi-rapporto incrementale (definizione e simmetria). Caratterizzazione della convessità in termini del bi-rapporto incrementale. Una funzione differenziabile è convessa se e solo se la sua derivata è crescente. Una funzione differenziabile è convessa se e solo se i suoi valori sono maggiori o uguali del valore corrispondente di una qualunque retta tangente al suo grafico. Una funione derivabile due volte è convessa se e solo se ha derivata seconda non negativa. Stretta convessità e sue caratterizzazioni.
- Studio del **grafico di una funzione**.
- <u>Teorema di Taylor</u>. Formula di Taylor con resto di Lagrange: se f è $C^{n+1}(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$, allora $R_n(x;x_0)=f^{(n+1)}(y)\ (x-x_0)^{n+1}/(n+1)!$ per un y opportuno tra x e x_0.
- **Teoria dell'integrazione di Riemann**.
  Funzioni semplici e loro rappresentazioni. Le funzioni semplici sono chiuse rispetto a somma, prodotto, massimo, minimo. Integrale delle funzioni semplici; buona posizione della definizione. Proprietà dell'integrale delle funzioni semplici: l'integrale è un funzionale lineare e positivo sullo spazio S delle funzioni semplici; disuguaglianza con i moduli. Lo spazio vettoriale delle funzioni limitate e a supporto compatto **S**; integrale di Riemann superiore ed inferiore su **S**; integrale di Riemann; le funzioni integrabili secondo Riemann; esempi (funzioni semplici); controesempi (la funzione caratteristica dei razionali tra 0 e 1). Caratterizzazione dell'integrabilità secondo Riemann anche tramite successioni (monotone). Gli insiemi delle funzioni semplici, delle funzioni Riemann integrabili e delle funzioni limitate a supporto compatto sono delle algebre (spazi vettoriali chiusi rispetto al prodotto).

L'integrale di Riemann (come mappa dalle funzioni Riemann integrabili ai numeri reali) è un funzionale lineare, positivo che conserva l'ordine.
Se f è integrabile, lo sono anche $f_{\pm}$, |f|. L'integrale del modulo è minore o uguale del modulo dell'integrale.
Integrabilità su intervalli. Integrabilità delle funzioni continue e limitate. Integrabilità delle funzioni continue a tratti (ossia con un numero finito di discontinuità).
Insiemi di **misura nulla** ed enunciato del teorema di Vitali-Lebesgue [*Una funzione limitata su un intervallo è integrabile secondo Riemann se e solo se il suo insieme di discontinuità è di misura nulla*].
Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo (varie formulazioni). Formula del cambio di variabili ed integrazione per parti in integrali definiti. Integrali su intervalli simmetrici rispetto a 0 di funzioni pari/dispari.

- Definizione di **dominio normale**: un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ della forma $\{(x,y): x \in [a,b] \text{ e } g(x) \leq y \leq f(x)\}]$ e di **area**: se D è un dominio normale con g e f integrabili su [a,b), area(D):= $\int_a^b$ (f-g).
- Teorema *Se D è il cerchio unitario $\{(x,y): x^2 + y^2 \leq 1\}$, area(D)=π.*
- Formula di Taylor con resto integrale. Sviluppo di Taylor di $(1+x)^a$.
- **Integrale in senso generalizzato.** Le funzioni integrabili in senso generalizzato su (a,b) formano uno spazio vettoriale ma non un'algebra (controesempi). Criteri di convergenza per integrali generalizzati.
- Somme di Riemann. **Lunghezza di grafici** e lunghezza della circonferenza unitaria. Approssimazioni di grafici con poligonali. Proprietà geometriche di seno e coseno.
- Criterio di convergenza serie-integrali (o "criterio integrale per serie a termini positivi").
- Calcolo dell'integrale di Gauss e formula di Stirling.