Sia $f \in C^n([a,b])$ derivabile $n+1$ volte in $[a,b] \setminus \{x_0\}$ e sia $x \in (x_0, b]$ (il caso $x \in [a, x_0)$ si tratta in modo analogo). Dobbiamo dimostrare che esiste $y \in (x_0, x)$ tale che, posto

$$u(x) := f(x) - T_n(x),$$

si ha

$$u(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Segue dal Teorema 7.34 (e dal fatto che $T_n^{(n+1)}(x)$ è identicamente nulla) che

$$u(x_0) = u'(x_0) = \cdots = u^{(n)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x). \tag{D7.6}$$

Posto

$$v(x) := (x - x_0)^{n+1}$$

vale

$$v(x_0) = v'(x_0) = \cdots = v^{(n)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad v^{(n+1)}(x) = (n+1)!\,. \tag{D7.7}$$

Per il teorema di Cauchy (Teorema 7.20), applicato alle funzioni u e v, esiste $y_1 \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{u(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{u(x) - u(x_0)}{v(x) - v(x_0)} = \frac{u'(y_1)}{v'(y_1)}.$$

Applicando una seconda volta il teorema di Cauchy, stavolta alle funzioni u' e v', otteniamo che esiste $y_2 \in (x_0, y_1)$ tale che

$$\frac{u(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{u'(y_1)}{v'(y_1)} = \frac{u'(y_1) - u'(x_0)}{v'(y_1) - v'(x_0)} = \frac{u''(y_2)}{v''(y_2)}.$$

Per la (D7.6) e (D7.7), si può ripetere questo procedimento $(n+1)$ volte, perciò esistono

$$x_0 < y_{n+1} < y_n < y_{n-1} < \cdots < y_2 < y_1 < x$$

tali che

$$\frac{u(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{u^{(k)}(y_k)}{v^{(k)}(y_k)} \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

In particolare, posto $y = y_{n+1}$, si trova

$$\frac{u(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{u^{(n+1)}(y)}{v^{(n+1)}(y)} = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}$$

che conclude la dimostrazione.