Somme di Riemann, lunghezza di grafici e funzioni trigonometriche

1 Somme di Riemann

Definizione 1 *Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ e, dato $n \in \mathbb{N}$, siano $\{x_i\}$ e $\{\xi_i\}$, con $0 \le i \le n$, $2(n+1)$ punti tali che*

$$x_0 := a < x_1 < \cdots < x_n := b \ , \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i) \ . \tag{1}$$

Si definisce **somma di Riemann** *(rispetto alla partizione $\{x_i\}$ e alla scelta di punti $\{\xi_i\}$) la somma*

$$\sigma_f = \sigma_f\big(\{x_i\}, \{\xi_i\}\big) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \ . \tag{2}$$

Si ricorda che l'**ampiezza di una partizione** $\{x_i\}$ come in (1) è, per definizione, il numero positivo

$$\delta := \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) \ . \tag{3}$$

Proposizione 2 *Sia $f \in C([a, b])$ (con $a < b$). Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_0 > 0$ tale che se $\{x_i\}$ è una qualunque partizione di $[a, b)$ con ampiezza $\delta < \delta_0$, allora*

$$\Big| \int_a^b f(x)dx - \sigma_f\big(\{x_i\}, \{\xi_i\}\big) \Big| \le \varepsilon \ , \tag{4}$$

per qualunque scelta di punti $\{\xi_i\}$ (con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i)$).

Dimostrazione Dato $\varepsilon > 0$, poiché f è *uniformemente* continua su $[a, b]$, esiste $\delta_0 > 0$ tale che

$$\mathrm{osc}\,(f, I) = \sup_I f - \inf_I f = \sup_{x,y \in I} |f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b - a) \ ,$$

per ogni intervallo $I \subseteq [a, b]$ tale che $\mathrm{mis}(I) < \delta_0$. Sia ora $\{x_i\}$ una qualunque partizione di $[a, b)$ con ampiezza $\delta < \delta_0$ e $\{\xi_i\}$ una qualunque scelta di punti. Allora:

$$\begin{aligned} \Big| \int_a^b f(x)dx - \sigma_f\big(\{x_i\}, \{\xi_i\}\big) \Big| &= \Big| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(\xi_i)\big)dx \Big| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big|f(x) - f(\xi_i)\big| dx \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Es 1 Si stimi il valore di δ_0 nel caso f sia uniformemente Lipschitziana su[1] $[a, b)$.

Es 2 Si generalizzi la Proposizione 2 nel caso $f \in C\big((a, b)\big)$ e sia integrabile (in senso generalizzato) su (a, b) (si noti che in tal caso si dovrà richiedere che $\xi_0 > a$).

[1] Risposta: se M è la costante di Lipschitz di f su $[a, b)$ si può prendere $\delta_0 = \dfrac{\varepsilon}{M(b - a)}$.

2 Lunghezza di grafici

Definizione 3 *Siano $a < b$ numeri reali, $f \in C^1([a,b])$ e G_f il suo grafico:*

$$G_f = G_f(a,b) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = f(x), \ x \in [a,b]\} \ . \tag{5}$$

Si definisce lunghezza di G_f il numero positivo

$$\ell\Big(G_f(a,b)\Big) := \int_a^b \sqrt{1+|f'|^2} \ . \tag{6}$$

Osservazione 4 Se $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ sono due elementi di $\mathbb{R}^2$ con $x_1 < x_2$, allora il segmento

$$\mathrm{s}(z_1, z_2) := \{(x,y) = z_1 + t(z_2 - z_1) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1) \ \big| \ t \in [0,1]\} \tag{7}$$

coincide con il grafico di[2]

$$f(x) := y_1 + (x - x_1) \ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ , \qquad x \in [x_1, x_2] \ .$$

Poiché $f' = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, dalla Definizione 3 segue che la lunghezza di $\mathrm{s}(z_1, z_2)$ è data da

$$\ell\big(\mathrm{s}(z_1,z_2)\big) := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \Big(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\Big)^2} = (x_2 - x_1) \ \sqrt{1 + \Big(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\Big)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ , \tag{8}$$

che, per definizione, è **la distanza euclidea** $d(z_1, z_2)$ tra z_1 e z_2.

Definizione 5 *Sia $f \in C^1([a,b])$. Se $x_0 := a < x_1 < \cdots x_n = b$ è una partizione di $[a,b]$ definiamo $P_f(\{x_i\})$ la* **poligonale iscritta** *nel grafico G_f (supportata su $\{x_i\}$) l'insieme*

$$P_f(\{x_i\}) := \bigcup_{i=1}^n \mathrm{s}\big((x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\big) \ , \tag{9}$$

e la sua lunghezza sarà data da

$$\ell(P_f(\{x_i\}) := \sum_{i=1}^n \ell\Big(\mathrm{s}\big((x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\big)\Big) \ . \tag{10}$$

Proposizione 6 *Data $f \in C^1([a,b])$ e $\varepsilon > 0$ esiste δ_0 tale che per ogni partizione $\{x_i\}$ di $[a,b]$ di ampiezza $\delta \le \delta_0$ si ha che*

$$\big|\ell(G_f(a,b)) - \ell(P_f(\{x_i\})\big| \le \varepsilon \ . \tag{11}$$

Dimostrazione Se $\{x_i\}$ è una partizione di $[a,b]$, dal Teorema di Lagrange segue che, per ogni $1 \le i \le n$ esiste $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tale che

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \ , \tag{12}$$

e quindi[3]

$$\begin{aligned}
\ell(P_f(\{x_i\}) \ &\overset{(10)}{=} \ \sum_{i=1}^n \ell\Big(\mathrm{s}\big((x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\big)\Big) \overset{(8)}{=} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^2} \\
&\overset{(12)}{=} \ \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + f'(\xi_i)^2 (x_i - x_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \\
&\overset{(2)}{=} \ \sigma_g(\{x_i\}, \{\xi_i\}) \ , \qquad \text{con} \qquad g := \sqrt{1 + (f')^2} \ .
\end{aligned}$$

[2] **Es 3.**

[3] Si ricordi la definizione di somma di Riemann relativa alla partizione $\{x_i\}$ ed alla scelta $\{\xi_i\}$); vedi file somme-riemann.pdf.

La tesi segue ora facilmente dalla Proposizione 2. ∎

Osservazione 7 Se assumiamo solo che $f \in C^1((a,b))$ possiamo facilmente estendere i risultati della sezione precedente nel caso $\sqrt{1+(f')^2}$ sia integrabile in senso generalizzato su (a,b) osservando che, in tal caso[4],

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \ell\big(G_f(a+\varepsilon, b-\varepsilon)\big) = \int_a^b \sqrt{1+|f'|^2}\ .$$

3 La lunghezza della circonferenza unitaria

Se denotiamo con

$$S^1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big|\ \ x^2+y^2=1\} \tag{13}$$

la circonferenza unitaria in $\mathbb{R}^2$, se

$$f_\pm := \pm\sqrt{1-x^2} \tag{14}$$

e $z_- = (-1,0)$ e $z_+ = (1,0)$, allora si ha che

$$S^1 = G_{f_+}(-1,1) \cup G_{f_-}(-1,1) \cup \{z_-\} \cup \{z_+\}\ . \tag{15}$$

Possiamo dunque definire la lunghezza di S^1 come[5]

$$\ell(S^1) := \ell(G_{f_+}(-1,1)) + \ell(G_{f_-}(-1,1))\ . \tag{16}$$

D'altra parte

$$\sqrt{1+|f_\pm'|^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \tag{17}$$

e quindi, dal teorema fondamentale del calcolo segue che[6]

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1+|f_\pm'|^2} &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = -\int_{-1}^1 (\,\mathrm{Arccos}\,x)' dx \\ &= \mathrm{Arccos}\,(-1) - \mathrm{Arccos}\,(1) = \pi - 0 = \pi\ . \end{aligned} \tag{18}$$

Abbiamo, dunque, dimostrato il seguente

Teorema 8 $\ell(S^1) = 2\pi$.

4 Le proprietà geometriche del seno e coseno

Proposizione 9 *Sia $(x,y)\in S^1$. Esiste un unico $t\in[0,2\pi)$ tale che*

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \mathrm{sen}\, t \end{cases} \tag{19}$$

[4]**Es 4**.

[5]Gli insiemi a destra della equazione in (15) sono disgiunti e i punti, per definizione, hanno lunghezza nulla.

[6]$x\in[-1,1] \to \mathrm{Arccos}\,x \in [0,\pi]$ è la funzione inversa di $t\in[0,\pi]\to\cos t\in[-1,1]$; e se $x\in[-1,1]\to \mathrm{Arcsen}\,x\in[-\pi/2,\pi/2]$ è la funzione inversa di $t\in[-\pi/2,\pi/2]\to[-1,1]$ si ha $\mathrm{Arccos}\,x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsen}\,x$.

Inoltre, tale t coincide con la lunghezza dell'"arco in S^1 che va da $(1,0)$ a (x,y) in senso antiorario" o più precisamente:

$$t = \begin{cases} \ell\Big(G_{f_+}(x,1)\Big) , & \text{se } y \geq 0 , \\ \pi + \ell\Big(G_{f_-}(-1,x)\Big) , & \text{se } y < 0 \end{cases} \tag{20}$$

dove $f_\pm$ è definito in (14).

Dimostrazione Dato $(x,y) \in S^1$ definiamo t come in (20). Se $y \geq 0$ e $x \in [-1,1]$, da (20), segue che

$$\begin{aligned} t &= \int_x^1 \sqrt{1+|f_+'|^2} = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi = -\int_x^1 (\,\mathrm{Arccos}\,\xi)' \\ &= \mathrm{Arccos}\,x - \mathrm{Arccos}\,1 = \mathrm{Arccos}\,x \in [0,\pi] \ . \end{aligned} \tag{21}$$

Dunque $\cos t = x$ e $y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos t^2} = |\,\mathrm{sen}\,t| = \mathrm{sen}\,t$ poiché il seno è positivo essendo $t \in [0,\pi]$.
Se, invece, $y < 0$ e $x \in (-1,1)$, da (20), segue che

$$\begin{aligned} t &= \pi + \int_{-1}^x \sqrt{1+|f_-'|^2} = \pi + \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi = \pi + -\int_{-1}^x (\,\mathrm{Arccos}\,\xi)' \\ &= \pi + \mathrm{Arccos}\,(-1) - \mathrm{Arccos}\,x = 2\pi - \mathrm{Arccos}\,x \in (\pi, 2\pi) \ , \end{aligned} \tag{22}$$

(essendo $x \in (-1,1)$, $\mathrm{Arccos}\,x \in (0,\pi)$). Dunque t, in (22) è un numero tra π e 2π, e

$$\cos t = \cos(2\pi - \mathrm{Arccos}\,x) = x \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-\cos t^2} = -|\,\mathrm{sen}\,t| = \mathrm{sen}\,t \ ,$$

poiché per $t \in (\pi, 2\pi)$ il seno è negativo.
Abbiamo dimostrato la validità di (19) con t definito in (20).
Passiamo all'unicità. Supponiamo, per assurdo, che esistano $0 \leq t_1 < t_2 < 2\pi$, tali che

$$\begin{cases} \cos t_1 = x = \cos t_2 \\ \mathrm{sen}\,t_1 = y = \mathrm{sen}\,t_2 \end{cases} \tag{23}$$

Poiché il coseno è iniettivo in $[0,\pi]$ e in $(\pi, 2\pi)$ segue che $t_1 \leq \pi < t_2$, ma questo contraddice la seconda relazione in (23) poiché il seno è non negativo in $[0,\pi]$ e strettamente negativo in $(0, 2\pi)$. ∎

Osservazione 10 (i) La Proposizione 9 mostra che la mappa

$$t \in [0, 2\pi) \to \Phi(t) := (x,y) = (\cos t, \,\mathrm{sen}\,t) \in S^1 \tag{24}$$

fornisce una corrispondenza biunivoca (iniettiva e suriettiva) tra l'intervallo $[0, 2\pi)$ e la circonferenza unitaria S^1.

(ii) Dalla periodicità di seno e coseno segue anche che Φ mette in corrispondenza biunivoca un *qualunque* intervallo $[a, a+2\pi)$ con S^1. Vale infatti la seguente affermazione:

Per ogni $(x,y) \in S^1$ e per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\exists!\ t \in [a, a+2\pi)$ tale che vale la relazione (19).

Dimostrazione *Esistenza*: dalla Proposizione 9 segue che esiste $t_0 \in [0, 2\pi)$ tale che $\cos t_0 = x$ e $\mathrm{sen}\,t_0 = y$. Allora se[7] $k := [(a-t_0)/(2\pi)]$, $t := t_0 + 2\pi k \in [a, a+2\pi)$ e $\cos t = \cos t_0$ e $\mathrm{sen}\,t = \mathrm{sen}\,t_0$.
Unicità: siano $t_1, t_2 \in [a, a+2\pi)$ tali che $\cos t_1 = \cos t_2$ e $\mathrm{sen}\,t_1 = \mathrm{sen}\,t_2$. Siano k_1 e k_2 due interi tali che $s_i := t_i - 2\pi k_i \in [0, 2\pi)$ ($k_i := [t_i/(2\pi)]$). Allora $\cos s_i = x$ e $\mathrm{sen}\,s_i = y$ e quindi, per la Proposizione 9, $s_1 = s_2$ e dunque (poiché t_1 e t_2 stanno nell'intervallo $[a, a+2\pi)$) $|t_1 - t_2| = 2\pi|k_1 - k_2| < 2\pi$ cioè $|k_1 - k_2| < 1$ che implica $k_1 = k_2$, ossia, $t_1 = t_2$. ∎

---

[7] $[x]$ denota la parte intera di x: $0 \leq x - [x] < 1$.