APPELLO A **ESAME 20410388 AM120-ANALISI MATEMATICA 2 – (AA 2021/22 – L. Chierchia) 20/6/2022**

Es 1 [Pt 30] Discutere la convergenza al variare del parametro reale x la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x \log\left(1 + x^{2^n} + \operatorname{sen}\frac{x}{n}\right)}{1 + x^n}$.

Es 2 [Pt 10] Sia $a_n = (\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3}) \cdot \tanh\left((-\sqrt{2})^{n^2}\right)$. Si determini $\limsup a_n$ e $\liminf a_n$.

Es 3 [Pt 10] Sia $f(x) = (|x|^{3/4} - 1)\exp\left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)$. Si discuta la uniforme continuità della funzione f sui seguenti domini: $A = (0, 1)$, $B = (-1, \frac{1}{2}]$, $C = (\sqrt{2}, 100)$, $D = [100, +\infty)$.

Es 4 [Pt 30] Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x} - \cosh x}{1 - \cos x^2}$.

Es 5 [Pt 20] Si studi la convergenza, al variare del parametro reale α, dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{\infty} (\log x)^{\alpha} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\, dx$.

Soluzioni

Es 1 Sia $u_n(x) = \dfrac{n^x \log\left(1 + x^{2^n} + \operatorname{sen}\frac{x}{n}\right)}{1 + x^n}$; u_n è definito per $x \neq -1$ e $u_n(0) = 0$. Quindi per $x = 0$ la serie converge banalmente. Se $|x| < 1$, $u_n(x) \sim x n^{x-1}$ e se $|x| > 1$, $u_n(x) \sim (\log|x|) \cdot n^x (2/x)^n$. Quindi, se $|x| < 1$ la serie converge assolutamente se $x \in (-1, 0]$ e diverge a $+\infty$ se $x \in (0, 1)$. Se $|x| > 1$, per confronto asintotico e criterio della radice la serie converge assolutamente se $|x| > 2$, mentre u_n non tende a 0 se $1 < |x| < 2$ (e quindi la serie non converge).
Infine, per $x = 1, 2$, la serie diverge a $+\infty$. Per $x = -2$, la serie converge assolutamente.

Es 2 Sia $b_n = \tanh\left((-\sqrt{2})^{n^2}\right)$ e $c_n = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$. Si noti che n^2 è pari se e solo se n è pari. La successione b_{n_k} converge a 1 se e solo n_k è definitivamente pari e converge a -1 se e solo se n_k è definitivamente dispari. La successione c_n è periodica di periodo 6 e assume i valori $c_1 = \sqrt{3}/2, c_2 = \sqrt{3}/2, c_3 = 0, c_4 = -\sqrt{3}/2, c_5 = -\sqrt{3}/2, c_6 = 0$. Quindi, $\limsup a_n = \sqrt{3}/2 = \lim a_{n_k}$ con $n_k = 2 + 6k$ e $\liminf a_n = -\sqrt{3}/2 = \lim a_{m_k}$ con $m_k = 3 + 6k$.

Es 3 La funzione f è continua su $\mathbb{R}\backslash\{1, -1\}$. $\sup_{(0,1)} |f| = +\infty$, quindi f non è uniformemente continua su A. $\lim_{x\to -1^+} f = 0$, quindi f è uniformemente continua su B. f è continua su $\overline{C}$ e quindi è uniformemente continua su C. $f \in C^1(D)$ e $\sup_D |f'| < +\infty$, quindi (per Lagrange), f è uniformemente continua su D.

Es 4 Poiché per $y \to 0$, $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + O(y^3)$, ponendo $y = \operatorname{sen} x$ si ha che

$$\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x} = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^4 x + O(x^6) = 1 + \frac{1}{2}\big(x - \frac{x^3}{6}\big)^2 - \frac{x^4}{8} + O(x^6) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{7}{24}x^4 + O(x^6)\,.$$

Inoltre, $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)$ e $1 - \cos x^2 = \frac{x^4}{2} + O(x^6)$. Quindi, il limite cercato è $-2/3$.

Es 5 Studiamo separatamente gli integrali impropri $I_1 = \displaystyle\int_1^2 (\log x)^{\alpha} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\, dx$ e $I_2 = \displaystyle\int_2^{\infty} (\log x)^{\alpha} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\, dx$.

Essendo $\operatorname{sen} 1/x$ continua su $[1, 2]$, $I_1 \approx \displaystyle\int_1^2 (\log x)^{\alpha}\, dx = \int_0^{\log 2} e^y y^{\alpha} dy \approx \int_0^{\log 2} y^{\alpha} dy < +\infty$ se e solo se $\alpha > -1$.

Per confronto asintotico $I_2 \approx \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(\log x)^{\alpha}}{x} dx = \int_{\log 2}^{+\infty} y^{\alpha} dy < +\infty$ se e solo se $\alpha < -1$. Dunque l'integrale diverge (vale $+\infty$) per ogni α.