APPELLO B **ESAME 20410388 AM120-ANALISI MATEMATICA 2 – (AA 2021/22 – L. Chierchia) 12/7/2022**

Es 1 [Pt 25] Discutere la convergenza, al variare del parametro reale x, della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n + \arctan \frac{1}{n}}{e^{xn} + n^{-x}}$.

Es 2 [Pt 25] Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(\sqrt{2}x) - e^{x^4} + \log(1-x^2)}{(\operatorname{senh} x) \operatorname{sen} \frac{x^3}{3}}$.

Es 3 [Pt 20] Si studi la convergenza, al variare del parametro reale α, dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x^\alpha}\, dx$.

Es 4 [Pt 15] Si determini $\limsup a_n$ e $\liminf a_n$ con $a_n = \left(\cos \frac{\pi}{3} n\right)^n - \cos \frac{\pi}{3} n$.

Es 5 [Pt 15] Sia $f(x) = x^\alpha \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$. Dire se esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia uniformemente continua in $(0, +\infty)$.

Soluzioni

Es 1 Sia $a_n = (-1)^n \frac{x^n + \arctan \frac{1}{n}}{e^{xn} + n^{-x}}$. Per $0 < x < 1$, $|a_n| \sim \frac{1}{n e^{nx}}$ e la serie converge assolutamente (radice). Per $x \geq 1$, $|a_n| \sim x^n e^{-xn}$ e la serie converge assolutamente (radice, essendo $x/e^x < 1$). Per $x = 0$, $a_n = \frac{1}{2}(-1)^n \arctan 1/n$ che converge semplicemente per Leibnitz ($\arctan 1/n$ è decrescente). Per $-1 < x < 0$, $|a_n| \sim 1/n^{1-x}$, e la serie converge assolutamente (serie di Riemann). Per $x \leq -1$ la serie non è infinitesima e quindi non converge.
In conclusione, la serie converge assolutamente in $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$, converge semplicemente per $x = 0$ e non converge altrimenti.

ATTENZIONE!! un errore molto comune è stato quello di usare il criterio di confronto asintotico per serie NON a termini positivi: NON si può fare! Ad esempio, se $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ e $b_n = a_n + \frac{1}{n^{3/4}}$, si ha che $\lim a_n/b_n = 1$, ma $\sum a_n$ converge (Leibnitz) e $\sum b_n = +\infty$.

Es 2 $\cosh \sqrt{2}x = 1 + x^2 + \frac{x^4}{6} + O(x^6)$, $e^{x^4} = 1 + x^4 + O(x^8)$, $\log(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)$; $(\operatorname{senh} x) \operatorname{sen} \frac{x^3}{3} \sim x^4/3$. Quindi, il valore del limite è -4.

Es 3 Studiamo l'integrale in $(0, 1)$ e poi in $(1, +\infty)$. Per $x \to 0$, $\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x^\alpha} \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^\alpha}$ che converge su $(0, 1)$ se e solo se $\alpha < 1$ e quindi l'integrale converge su $(0, 1)$ se e solo se < 1.
$\frac{\pi}{2} - \arctan x \sim 1/x$ per $x \to +\infty$ (Hopital) e quindi l'integrale si comporta come l'integrale di $1/x^{\alpha+1}$ che converge in $(1, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 0$.
In conclusione l'integrale converge se e solo se $0 < \alpha < 1$.

Es 4 La funzione $n \to \cos \frac{\pi}{3} n$ è periodica di periodo 6 e assume i valori $\pm 1/2$ e ± 1. I valori possibili di a_n sono: 0 se $n = 6k$; $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}$ se $n = 1 + 6k$ o $n = 5 + 6k$; $\frac{(-1)^n}{2^n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}$ se $n = 2 + 6k$ o $n = 4 + 6k$; $(-1)^n + 1 = 0$ se $n = 3 + 6k$. Dunque $\limsup a_n = \frac{1}{2}$ ($n_k = 2 + 6k$) e $\liminf a_n = -1/2$ ($n_k = 1 + 6k$).

Es 5 f è uniformemente continua in $[a, b]$ per ogni $0 < a < b < +\infty$ (per Heine–Cantor). Affinché f sia uniformemente continua in $(0, 1)$ è necessario che esista $\lim_{x\to 0+} f$ e quindi che $\alpha > 0$. Per l'uniforme continuità in $(1, +\infty)$ è sufficiente che f' sia limitata (per Lagrange), il che accade se $\alpha \leq 2$. Se $\alpha > 2$ f cresce più che linearmente per $x \to +\infty$ e quindi non può essere uniformemente continua su $(1, +\infty)$. In definitiva f è uniformememnte continua su $(0, +\infty)$ se e solo se $0 < \alpha \leq 2$.