APPELLO C **AM120–ANALISI MATEMATICA 2 – (AA 2021/22 – L. Chierchia) 31/8/2022**

NOME: ____________ **COGNOME:** ____________ **MATRICOLA:** ____________

Es 1 [Pt 30] Discutere la convergenza, al variare del parametro reale x, della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\operatorname{senh} x^n}{n^n}+(2x)^n\log n\Big)$.

Es 2 [Pt 10] Si determini $\limsup a_n$ e $\liminf a_n$ con $a_n=\tan\Big(\frac{\pi}{2}\cdot(-1)^{[n/2]}\cdot\big(1-\frac{1}{n}\big)\Big)$.

Es 3 [Pt 10] Sia $f(x)=e^{-x^2}+x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}$. Discutere l'uniforme continuità di f su $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Es 4 [Pt 10+20] (i) Calcolare $f^{(100)}(0)$ e $f^{(1001)}(0)$ con $f(x)=e^{-x^4}$.

(ii) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x^2/2}+\log(\cos x)}{\tan(2x^4+3x^5)}$.

Es 5 [Pt 20] Si studi la convergenza, al variare del parametro reale α, dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty}\big(\tanh x^3\big)\cdot\frac{\log(1+x^x)}{x^\alpha}\,dx$.

Soluzioni

Es 1 Se $|x|\le1$, $\left|\frac{\operatorname{senh} x^n}{n^n}\right|\le\operatorname{senh}1\sum\frac{1}{n^n}<+\infty$. Se $|x|>1$, $\left|\frac{\operatorname{senh} x^n}{n^n}\right|\sim\frac{e^{|x|^n}}{2n^n}\to+\infty$ e quindi $\sum\frac{\operatorname{senh} x^n}{n^n}$ non converge.
$\sum(2x)^n\log n$ converge assolutamente se $|x|<1/2$ e non è infinitesima altrimenti.
In conclusione, la serie data converge se e solo se $|x|<1/2$ (e se converge la convergenza è assoluta).

Es 2 Se $n_k=4k$, $a_{n_k}\to+\infty$ e quindi $\limsup a_n=+\infty$; se $m_k=4k+2$, $a_{m_k}\to-\infty$ e quindi $\liminf a_n=-\infty$.

Es 3 $\sup|f'|<+\infty$ e dunque (per Lagrange) la funzione è Lipschitziana e quindi uniformemente continua su $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Es 4 (i) $e^{-x^4}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k}}{k!}$, per cui $f^{(100)}(0)=-\frac{100!}{25!}$ e $f^{(1001)}(0)=0$ (così come tutte le derivate dispari, essendo la funzione regolare e pari).

(ii) $\log(\cos x)=\log(1-f)$ con $f=1-\cos x$, da cui, $\log(\cos x)=-f-\frac{f^2}{2}+O(f^3)=-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}x^4+O(x^6)$; $1-e^{-x^2/2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+O(x^6)$; $\tan(2x^4+3x^5)\sim2x^4$ per $x\to0$. In conclusione il limite cercato è $-5/48$.

Es 5 $\displaystyle\int_0^1\big(\tanh x^3\big)\cdot\frac{\log(1+x^x)}{x^\alpha}\,dx\approx\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha-3}}\,dx<+\infty$ se e solo se $\alpha<4$. $\displaystyle\int_1^{\infty}\big(\tanh x^3\big)\cdot\frac{\log(1+x^x)}{x^\alpha}\,dx\approx\int_1^{\infty}\frac{\log x}{x^{\alpha-1}}\,dx<+\infty$ se e solo se $\alpha>2$.
In conclusione, l'integrale converge se e solo se $2<\alpha<4$.