ESERCITAZIONE AM120
Esercizi su sviluppi di Taylor e limiti

25 maggio 2022

Esercizio 1. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt}{x\sqrt[5]{1+5x} - x^2 - \sin x}.$$

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(2x^5)}{1+x^3},$$

si determini $f^{(35)}(0)$, cioè il valore della derivata 35-esima di f in $x=0$.

Esercizio 3. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{16\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + (4x-\pi)^2 - 32}{(4x-\pi)^4}.$$

Soluzioni

Esercizio 1. Per t vicino a 0 si ha $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5)$. Quindi, per x vicino a 0, si ha

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dx = \int_0^x \left[1 - \frac{t^2}{6} + O(t^4)\right] dx = x - \frac{x^3}{18} + O(x^5).$$

Inoltre, per x vicino a 0 si ha

$$\sqrt[5]{1+5x} = 1 + \frac{1}{5}(5x) + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{2}(5x)^2 + O(x^3) = 1 + x - 2x^2 + O(x^3).$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt}{x\sqrt[5]{1+5x} - x^2 - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^3}{18} + O(x^5)}{-\dfrac{11}{6}x^3 + O(x^4)} = -\frac{1}{33}.$$

Esercizio 2. Usiamo i seguenti sviluppi di Taylor centrati in $x = 0$:

$$\sin(2x^5) = 2x^5 - \frac{(2x^5)^3}{3!} + \frac{(2x^5)^5}{5!} - \frac{(2x^5)^7}{7!} + O(x^{45}),$$

$$\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - x^{15} + x^{18} - x^{21} + x^{24} - x^{27} + x^{30} + O(x^{33}).$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^5 - 2x^8 + 2x^{11} - 2x^{14} + \frac{2^3}{3!}x^{15} + 2x^{17} - \frac{2^3}{3!}x^{18} - 2x^{20} + \frac{2^3}{3!}x^{21} \\ &\quad + 2x^{23} - \frac{2^3}{3!}x^{24} + \frac{2^5}{5!}x^{25} - 2x^{26} + \frac{2^3}{3!}x^{27} - \frac{2^5}{5!}x^{28} + 2x^{29} - \frac{2^3}{3!}x^{30} \\ &\quad + \frac{2^5}{5!}x^{31} - 2x^{32} + \frac{2^3}{3!}x^{33} - \frac{2^5}{5!}x^{34} + \left[2 - \frac{2^7}{7!}\right]x^{35} + O(x^{36}), \end{aligned}$$

che è lo sviluppo di Taylor di f fino all'ordine 35 centrato in $x = 0$.
Deduciamo che

$$f^{(35)}(0) = 35!\left[2 - \frac{2^7}{7!}\right].$$

Esercizio 3. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per risolvere la forma indeterminata è sufficiente applicare più volte consecutive il teorema di Bernoulli-Hôpital, ottenendo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{16\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + (4x-\pi)^2 - 32}{(4x-\pi)^4} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{16\sqrt{2}(\cos x - \sin x) + 8(4x-\pi)}{16(4x-\pi)^3} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{16\sqrt{2}(-\sin x - \cos x) + 32}{192(4x-\pi)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{16\sqrt{2}(-\cos x + \sin x)}{1536(4x-\pi)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{16\sqrt{2}(\sin x + \cos x)}{6144} = \frac{1}{192}.$$