

Esercizi

Es 1 [Pt 10] Discutere la convergenza (assoluta e semplice) al variare di $x \in \mathbb{R}$ della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+x^{10n})}{n^x}$.

Es 2 [Pt 10] Sia $a_n = \{n/3\} + \frac{1}{n}$, dove $\{x\}$ denota la parte frazionaria di x . Si determini $\limsup a_n$ e $\liminf a_n$.

Es 3* [Pt 10] Discutere la convergenza (assoluta e semplice) al variare di $x \in \mathbb{R}$ della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^{x^n}}{n!} + \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right)$.

Es 4 [Pt 10] Sia a_n come all'Es 2 e sia $b_n := a_n + (-1)^n$. Si determini l'insieme dei valori limiti $\mathcal{L}_{\{b_n\}}$.

Quesiti

(Q₁) [5 Pt] Dare la definizione di punti isolati e punti di accumulazione (sia in $\mathbb{R}$ che in $\mathbb{R}^*$) e dimostrare che un punto è d'accumulazione se e solo se non è isolato.

(Q₂) [5 Pt] Enunciare e dimostrare il teorema di permanenza del segno per limiti di funzione.

(Q₃) [5 Pt] Enunciare i teoremi degli zeri e dei valori intermedi per funzioni continue e dedurre il secondo dal primo.

(Q₄) [5 Pt] Enunciare e dimostrare il criterio di convergenza della radice per serie.

(Q₅*) [5 Pt] Enunciare e dimostrare la formula per la somma geometrica.

(Q₆*) [5 Pt] Dimostrare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.

(Q₇) [10 Pt] Enunciare e dare uno sketch della dimostrazione del teorema esponenziale $\text{Exp}(x) = e^x$.

(Q₈*) [10 Pt] Dare la definizione di insieme compatto e dimostrare che in $\mathbb{R}$ i compatti coincidono con gli insiemi chiusi e limitati.

Gli esercizi/quesiti con asterisco sono solo per MAT. Per la sufficienza è necessario ottenere almeno 40 pt nella prima parte per MAT (Es 1,2,3, Quesiti da 1 a 6) e almeno 27 punti nella prima parte per FIS (Es 1,2, Quesiti da 1 a 4)

Soluzioni esercizi

Es 1 La serie è a termini non negativi. Sia $|x| < 1$. Allora, $\frac{\log(1+x^{10n})}{n^x} \sim \frac{x^{10n}}{n^x}$, e poiché $\lim \left(\frac{x^{10n}}{n^x} \right)^{1/n} = x^{10} < 1$, per il criterio della radice e del confronto asintotico, segue che la serie converge per $|x| < 1$.

In $x = \pm 1$ la serie diverge.

Sia $|x| > 1$. Allora, $\frac{\log(1+x^{10n})}{n^x} \sim \frac{\log x^{10n}}{n^x} = \frac{10 \log |x|}{n^{x-1}}$ e poiché la serie $\sum \frac{1}{n^{x-1}}$ converge se e solo se $x > 2$, per confronto asintotico la serie data converge per $x > 2$ e diverge per $x < -1$. Riassumendo la serie converge per $x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$ e diverge altrimenti.

Es 2 Se $\{c_n\}$ è una successione convergente, allora, $\mathcal{L}_{\{x_n\}} = \mathcal{L}_{\{x_n+c_n\}}$ per ogni successione $\{x_n\}$; quindi basta studiare la successione $x_n = \{n/3\}$. Poiché $\{x+1\} = \{x\}$, la successione $\{x_n\}$ è periodica di periodo 3, ossia $x_{n+3} := x_n$ per ogni n . Quindi l'immagine di $\{x_n\}$ è $\{x_1, x_2, x_3\} = \{1/3, 2/3, 0\}$. Sia $n_k = 3k$ e $m_k = 2/3 + 3k$. Allora, $x_{n_k} = 0$ e $x_{m_k} = 2/3$ per ogni k . Ne segue che $\liminf x_n = \liminf a_n = 0$ e $\limsup x_n = \limsup a_n = 2/3$.

Es 3* Discutiamo prima la convergenza delle due serie separatamente. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{x^n}}{n!}$ è a termini positivi. Poiché

$$\frac{n^{x(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{x^n}} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^x \cdot (n+1)^{x-1} \rightarrow \ell = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ e & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x < 1 \end{cases},$$

dal criterio del rapporto segue che $\sum \frac{n^{x^n}}{n!}$ converge se $x < 1$ e diverge per $x \geq 1$.

Studiamo, ora, la convergenza assoluta della serie $\sum \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ ossia la serie $\sum \left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right| = \sum \frac{|x|^n}{1+x^{2n}}$. Per $|x| < 1$, $\frac{|x|^n}{1+x^{2n}} \sim |x|^n$ e quindi (criterio della radice) $\sum \frac{|x|^n}{1+x^{2n}}$ converge. Per $|x| > 1$, $\frac{|x|^n}{1+x^{2n}} \sim 1/|x|^n$ e quindi (criterio della radice) $\sum \frac{|x|^n}{1+x^{2n}}$ converge. Dunque la serie $\sum \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ converge assolutamente per ogni $x \neq \pm 1$. Per $x = -1$ la serie non converge (il termine generico non tende a 0) e per $x = 1$ diverge.

In conclusione, la serie data converge assolutamente per $\{x < 1, x \neq -1\}$, non converge $x = -1$ e diverge per $x \geq 1$.

Es 4 [Pt 10] Come osservato nell'Es 2, basta studiare la successione $y_n = x_n + (-1)^n$. La successione $\{y_n\}$ ha periodo 6 e i suoi valori sono $-2/3, 5/3, -1, 4/3, -1/3, 1$; ognuno di tali valori è il limite, rispettivamente, della sottosuccessione $y_{n_k^{(j)}}$, dove $n_k^{(j)} = j + 6k$ per $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Dunque $\mathcal{L}_{\{b_n\}} = \{-2/3, 5/3, -1, 4/3, -1/3, 1\}$ (in particolare $\limsup y_n = 5/3$ e $\liminf y_n = -1$).