Es 1 [Pt 30] Discutere la convergenza al variare di $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ delle serie:
(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n \cdot \arctan(-x)^n}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{\operatorname{senh} x^{2n}}$, (iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{\log n \cdot \arctan(-x)^n} + \frac{n!}{\operatorname{senh} x^{2n}}\Big)$,

Es 2 [Pt 10] Sia $a_n = n \operatorname{sen}\big(\frac{(-1)^n}{2n}\big) + \{\frac{3}{4}n\}$, dove $\{x\}$ denota la parte frazionaria di x. Si determini $\limsup a_n$ e $\liminf a_n$.

Es 3 [Pt 10] Discutere la uniforme continuità della funzione $f(x) = x^{\sqrt{2}} + x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ sui seguenti insiemi $A = (0, 1)$, $B = (1, +\infty)$, $C = \{x \in \mathbb{Q} \big| \, 0 < x < 10^{10}\}$.

Es 4 [Pt 20] Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{x \cos\sqrt{x} - \log(1 + x)}{x \cosh^2 x - x}$.

Es 5 [Pt 10] Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 10 in $x = 0$ della funzione $f(x) = (\cos x^4)^{3/2}$. In particolare, determinare $f^{(8)}(0)$.

Es 6 [Pt 20] Si studi la convergenza, al variare del parametro reale α, dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2} - |\cos x|}{x^\alpha}\, dx$.

Soluzioni

Es 1 (i) Per $0 < |x| < 1$, la serie non converge: $|\log n \cdot \arctan(-x)^n| = \log n \cdot \arctan |x|^n \sim \log n \cdot |x|^n \to 0$ e quindi i termini della serie non tendono a zero. Per $x \le -1$, $1/(\log n \cdot \arctan(-x)^n) > 2/(\pi n)$ e quindi la serie diverge per confronto con la serie armonica. Per $x \ge 1$, la serie converge per Leibnitz essendo $\log n \cdot \arctan(-x)^n = (-1)^n \log n \cdot \arctan x^n$ con $\log n \cdot \arctan x^n$ strettamente crescente. In conclusione la serie converge (semplicemente) se $x \ge 1$ e non converge altrimenti.
(ii) La serie è a termini positivi. Per $0 < |x| \le 1$, $\frac{n!}{\operatorname{senh} x^{2n}} \to +\infty$ e la serie diverge. Per $|x| > 1$ $\frac{n!}{\operatorname{senh} x^{2n}} \sim \frac{2 \cdot n!}{e^{x^{2n}}} \le \frac{2 \cdot n^n}{e^{x^{2n}}} = 2\exp\big(-(x^{2n} - n \log n)\big)$ e la serie converge (criterio della radice).
(iii) La serie converge se e solo se $x > 1$ (più precisamente, per $x > 1$ la serie converge semplicemente, per $x \le 1$ la serie diverge a $+\infty$).

Es 2 Siano $b_n := n \operatorname{sen}\big(\frac{(-1)^n}{2n}\big)$ e $c_n = \{3n/4\}$; b_{n_k} converge (a $\pm 1/2$) se solo se n_k è definitivamente pari o definitivamente dispari; c_n è periodica di periodo 4 ed assume i valori $\{3i/4\}$ per $1 \le i \le 4$ e cioè (in ordine) 3/4, 1/2, 1/4 e 0. Dunque considerando le 4 successioni $n_k^{(i)} := i + 4k \in \mathbb{N}$, si vede che $\mathscr{L}_{a_n} = \{1/4, 1, -1/4, 1/2\}$ per cui $\liminf a_n = -1/4$ e $\limsup a_n = 1$.

Es 3 Se poniamo $\tilde{f}(x) = f(x)$ per $x > 0$ e $\tilde{f}(0) = 0$, la funzione $\tilde{f}$ è continua su $[0, +\infty)$ e quindi uniformemente continua su ogni intervallo $[0, M]$ con $M \ge 0$ (Heine–Cantor). In particolare è uniformemente continua su A e su $C \subseteq [0, 10^{10}]$. Poichè $\lim_{x\to+\infty} f(x)/(ax) = +\infty$ per ogni $a > 0$, f non è uniformemente continua su B.

Es 4 Per $0 < x < 1$ si ha:

$$\begin{aligned} x\cos\sqrt{x} &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{24} + O(x^4)\,, \\ \log(1+x) &= x - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)\,, \\ x\cosh^2 x - x &= x\big(1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)\big)^2 - x = x^3 + O(x^4)\,, \end{aligned}$$

da cui segue che $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{x \cos\sqrt{x} - \log(1 + x)}{x \cosh^2 x - x} = -\frac{7}{24}$.

Es 5 $\cos x^4 = 1 - \frac{x^8}{2} + O(x^{16})$; $(1+y)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}y + O(y^2)$, da cui, ponendo $y = -\frac{x^8}{2} + O(x^{16})$ si ottiene $(\cos x^4)^{3/2} = 1 - \frac{3}{4}x^8 + O(x^{16})$ e quindi $T_{f,8}(x; 0) = 1 - \frac{3}{4}x^8$ e $f^{(8)}(0) = -\frac{3}{4}8! = -30240$.

Es 6 Sia $f(x) = \frac{e^{-x^2} - |\cos x|}{x^\alpha}$. Per $x \to 0+$, $f(x) \sim \frac{1}{2}x^{2-\alpha}$ e quindi $\displaystyle\int_0^1 f$ converge se e solo se $\alpha < 3$.
$\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2} x^{-\alpha}$ converge per ogni α (poiché $e^{-x^2} x^{-\alpha} < e^{-x}$ per x sufficientemente grande).
$\frac{|\cos x|}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$ e quindi $\displaystyle\int_1^\infty |f|$ converge per ogni $\alpha > 1$. Mentre se[1] $\alpha \le 1$, $\displaystyle\int_1^\infty |\cos x|/x^\alpha = +\infty$. In definitiva, l'integrale dato converge se solo se $\alpha \in (1, 3)$.

---

[1] L'argomento è stato dato in classe: Sia $\alpha > 0$ (che ovviamente implica anche il caso $\alpha \le 0$) e sia $I_k := [k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi]$ per $k \ge 1$. Su I_k si ha $|\cos x|/x^\alpha \ge 1/(\sqrt{2}k^\alpha)$ e dunque $\displaystyle\int_1^\infty |\cos x|/x^\alpha \ge \sum_{k=1}^\infty \int_{I_k} |\cos x|/x^\alpha \ge \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$.