Lemma $\cos 2 < -1/3$.

Dimostrazione Dalla definizione di coseno segue che

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \rho(x), \quad (1)$$

con

$$\begin{aligned} \rho(x) &:= \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} - \frac{x^{12}}{12!} + \dots \\ &= \frac{x^6}{6!} \left(1 - \frac{x^2}{8 \cdot 7}\right) + \frac{x^{10}}{10!} \left(1 - \frac{x^2}{12 \cdot 11}\right) + \dots \end{aligned}$$

Quindi se $0 < x^2 < 56$ gli infiniti termini tra parentesi della serie (convergente¹) sono strettamente positivi e dunque $\rho(x) > 0$. In particolare, prendendo $x = 2$, si ha che $\rho(2) > 0$, e

$$\cos 2 \stackrel{(1)}{=} 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} - \rho(2) < 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -1/3. \quad \blacksquare$$

Adattando l'argomento usato nella dimostrazione del lemma si svolgano i seguenti esercizi:

Es 1 Siano $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che $0 < x^2 < (2n+2)(2n+1)$. Allora:

- (i) $\cos x < \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, n dispari
(ii) $\cos x > \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, n pari

Es 2 Siano $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che $0 < x^2 < (2n+3)(2n+2)$. Allora:

- (i) $\sin x < \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, n dispari
(ii) $\sin x > \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, n pari

Es 3 Sapendo che $|\sin x| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si dimostri che $|\sin x| < |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

¹Se $S_n = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow \rho \in \mathbb{R}$ sono le somme parziali di una serie convergente, allora, per il teorema ponte,

$\lim S_{n_j} = \rho$ per una qualunque successione $\{n_j\}$ a valori in $\mathbb{N}$ e tale che $n_j \rightarrow +\infty$; in particolare, $\sum_{k=1}^{2j} a_k = (a_1 + a_2) + \dots + (a_{2j-1} + a_{2j}) \rightarrow \rho$, per cui, se $a_{2k-1} + a_{2k} > 0$, allora $\rho > 0$.