Simulazione Parte 1 dello scritto

Es 1 [Pt 30] Discutere la convergenza (assoluta e semplice[1]) al variare di $x \in \mathbb{R}$ della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \log\left(1 + nx^{2n}\right)}{n^x}.$$

Es 2 [Pt 10] Sia $a_n = (-1)^n \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{n}{4}\pi\right)\right)$. Si determini $\limsup a_n$ e $\liminf a_n$.

Es 3 [Pt 10] Sia $f(x) = x^\alpha \operatorname{sen}(1/x)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
(i) Dire per quali valori di α la funzione f è uniformemente continua su $(0,1)$.
(ii) Discutere l'uniforme continuità di f su $(0,+\infty)$ per $\alpha \leq 1$ e per $\alpha > 2$ Dire per quali valori di α la funzione f è uniformemente continua su $(1,+\infty)$.

Risposte

Es 1: La serie non converge se $x \leq 0$, converge semplicemente per $x \in (0,1)$, diverge per $x \in [1,2]$, converge assolutamente per $x > 2$.

Es 2: $\limsup a_n = e$; $\liminf a_n = -e^{\sqrt{2}/2}$.

Es 3: (i) Se $\alpha > 0$, f è uniformemente continua su $(0,1)$. Se $\alpha \leq 0$ la funzione non è uniformemente continua su $(0,1)$.
(ii) Se $\alpha \leq 1$ la funzione è uniformemente continua su $(1,+\infty)$; se $\alpha > 2$ la funzione non è uniformemente continua su $(1,+\infty)$.

[1] 'Convergenza semplice' significa che la serie converge ma non converge assolutamente.