① Dimostrare che $x \to |x|$ è continua

② Dimostrare che $x \to x^+$ è continua.

③ Dimostrare che se f, g sono continue in x_0 allora $\max(f, g)$ è continua in x_0 [stessa cosa con $\min(f, g)$]

④ Dimostrare che $\forall\, r \in \mathbb{Q}_+$

$x \to x^r$ per $x \geq 0$ è continua

① Con gli ε e i δ. Fisso $x_0 \in \mathbb{R}$

Dire che $|x|$ è continua in x_0 equivale a dire che $\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$ cioè

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ per cui se

$|x - x_0| < \delta$ allora $\big||x| - |x_0|\big| < \varepsilon$

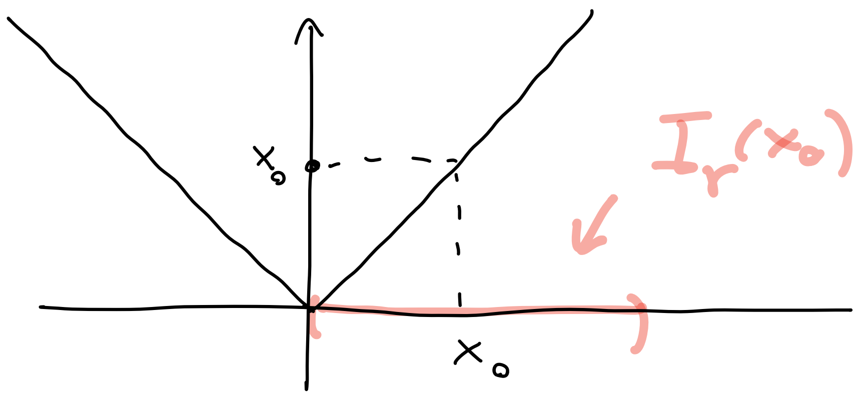
Ricordando che $\big||x| - |x_0|\big| < |x - x_0|$

basta prendere $\delta(\varepsilon, x_0) = \varepsilon$

$\vdash\!\dashv$

Potrei anche dire che se $x_0 \neq 0$.

(mettiamo che $x_0 > 0$) allora esiste tutto un intorno di x_0 $I_r(x_0)$ per cui $\forall x \in I_r(x_0)$ x ha lo stesso segno di x_0



in questo intorno $|x| \equiv x$ (REM. $x_0 > 0$) che è una funzione continua.

Ora dato che la continuità di una funzione in x_0 dipende solo dal suo comportamento "vicino a x_0" cioè in un intorno di x_0 se $x_0 \neq 0$ $|x|$ è continua.

Se $x_0 = 0$ devo fare con gli ε e δ.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon)$: se $|x - 0| = |x| < \delta$ allora

$\big|\, |x| - |0| \,\big| = |x| < \varepsilon$

Basta prendere $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$

② $x \longrightarrow x^+ = \max(x, 0) = \frac{1}{2}(x + |x|)$

è continua

dato che x e $|x|$ sono funzioni continue

e somma e prodotto di funzioni continue è continua.

③ Composizione di funzioni continue

è continua quindi se f, g sono

continue lo sono anche $f - g$ e

$(f-g)^+$.

Ora $\max(f, g) = f + (g - f)^+$

è somma di funzioni continue

e quindi continua.

④ $x \to x^r$ per $r \in \mathbb{Q}_+$ $x \geq 0$

① continuità in $x_0 = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ t.c. se $|x| = x < \delta$

allora $|x^r| = x^r < \varepsilon$

È basta prendere $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{r}}$ infatti

dato che $x \to x^r$ è crescente

$$0 \leq x < \varepsilon^{1/r} \iff 0 \leq x^r < \varepsilon$$

② continuità in $x_0 = 1$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ t.c. se $|x-1| < \delta$

allora $|x^r - 1| < \varepsilon$

$|x^r - 1| < \varepsilon$ si scrive come

$$1 - \varepsilon < x^r < 1 + \varepsilon$$ che è

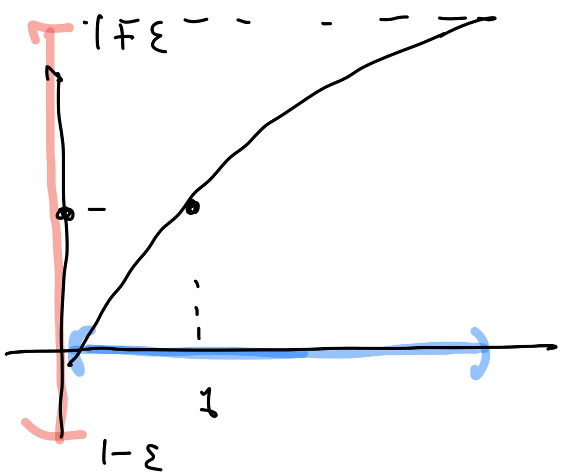
equivalente a

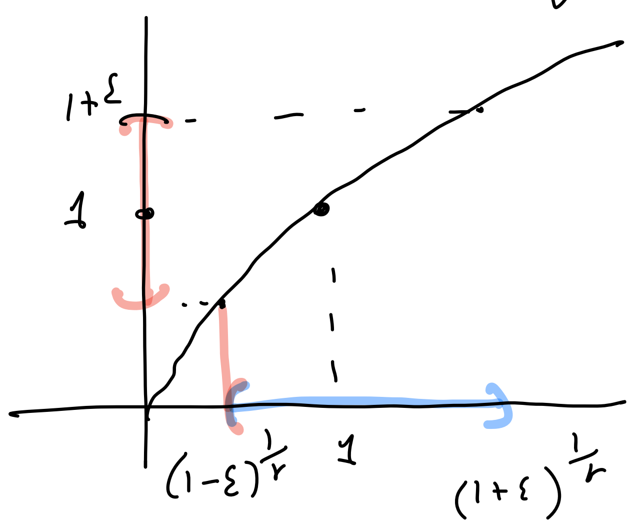
$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{r}} < x < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{r}}$$

se $1-\varepsilon \geq 0$ mentre viene

$$0 < x < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{r}}$$

altrimenti





in notazione compatta

$$(1-\varepsilon) < x^r < (1+\varepsilon)$$

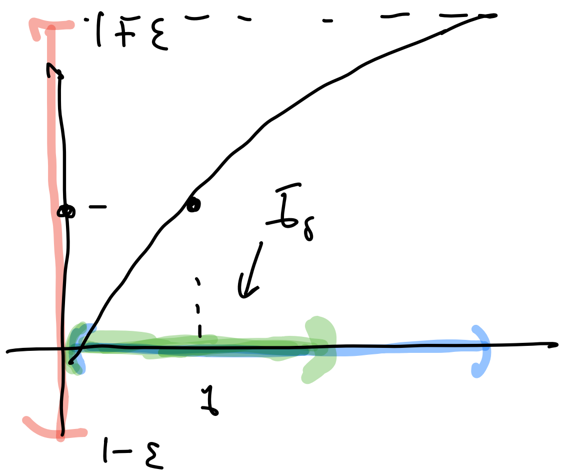
$$\Updownarrow$$

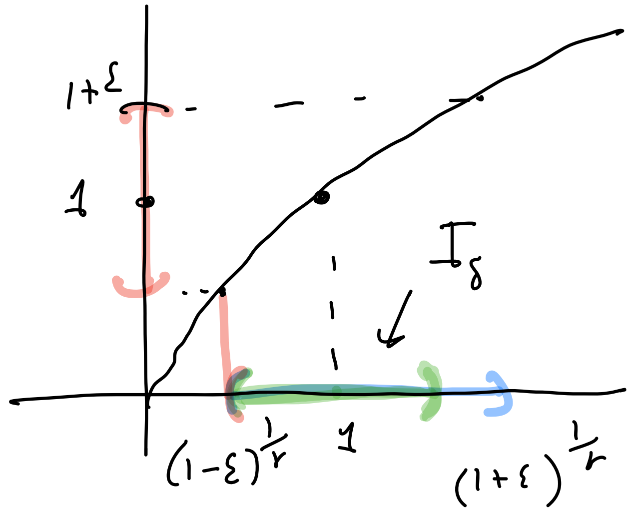
$$\max\left(0, (1-\varepsilon)^{\frac{1}{r}}\right) < x < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{r}}$$

devo prendere un intorno <u>SIMMETRICO</u>

contenuto in) prendo

$$\delta = \min\left(1, (1+\varepsilon)^{\frac{1}{r}} - 1, 1 - (1-\varepsilon)^{\frac{1}{r}}\right)$$





③ Continuità in $x_0 \neq 0$

devo verificare

$$\lim_{x \to x_0} x^r = x_0^r$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^r}{x_0^r} = 1 \iff \lim_{x \to x_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^r = 1$$

$$\iff \lim_{y \to 1} y^r = 1$$ (che ho dimostrato nel passo 2!)

$\blacksquare$

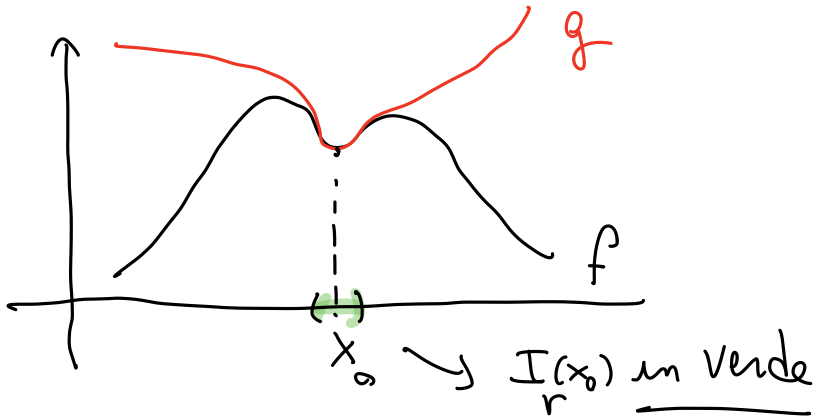
Extra: Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$

dato $x_0 \in D$ se $\exists \ I_r(x_0)$ tale che

$f(x) = g(x) \quad \forall \ x \in I_r(x_0) \cap D$ allora

f è continua in $x_0 \iff g$ è continua in x_0

Dim:



Sappiamo che

f è continua in

x_0 quindi $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_0(\varepsilon, x_0)$: se

$|x - x_0| < \delta_0$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Vogliamo dimostrare che [N.B. $g(x_0) = f(x_0)$!]

$\forall \ \varepsilon > 0 \quad \exists \ \delta_1(\varepsilon, x_0)$: se $|x - x_0| < \delta_1$

allora $|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

BASTA PRENDERE $\delta_1 = \min(\delta_0, r)$!

infatti dato che $\delta_1 \leq r$ se $|x-x_0| < \delta_1$

allora $|x-x_0| < r \Rightarrow x \in I_r(x_0)$

e quindi $f(x) = g(x)$ quindi:

$|g(x) - f(x_0)| = |f(x) - f(x_0)|$

inoltre dato che $\delta_1 \leq \delta_0$ se $|x-x_0| < \delta_1$

allora $|x-x_0| < \delta_0$ e quindi (per *)

$|g(x) - f(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

EXTRA

dimostriamo la continuità di $\max(f,g)$

direttamente

Dimostrazione: se $f(x_0) - g(x_0) \neq 0$

allora in $A \cap I(x_0)$ ha lo stesso segno

CASO 1. $f(x_0) - g(x_0) > 0 \Rightarrow$ in

$A \cap I(x)$ $f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow$

$$h(x) = \max(f(x), g(x)) = f(x) \quad \text{in } A \cap I(x_0)$$

quindi dalla continuità di f in x_0

$\Rightarrow$ $h(x)$ è continua in x_0

CASO 2. $f(x_0) - g(x_0) < 0 \Rightarrow$ in

$A \cap I(x_0)$ $f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow$

$$h(x) = \max(f(x), g(x)) = g(x) \quad \text{in } A \cap I(x_0)$$

quindi dalla continuità di g in x_0

$\Rightarrow$ $h(x)$ è continua in x_0

CASO 3. Se $f(x_0) = g(x_0)$ uso la definizione $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ t.c.

① se $x \in I_{\delta_1}(x_0) \cap A$ si che

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

② se $x \in I_{\delta_2}(x_0) \cap A$ si ha

$$|g(x)-f(x_0)| = |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

quindi ponendo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

in $I_\delta(x_0) \equiv I_{\delta_1}(x_0) \cap I_{\delta_2}(x_0)$

si ha $|f(x) - f(x_0)| <$ e $|g(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

e quindi

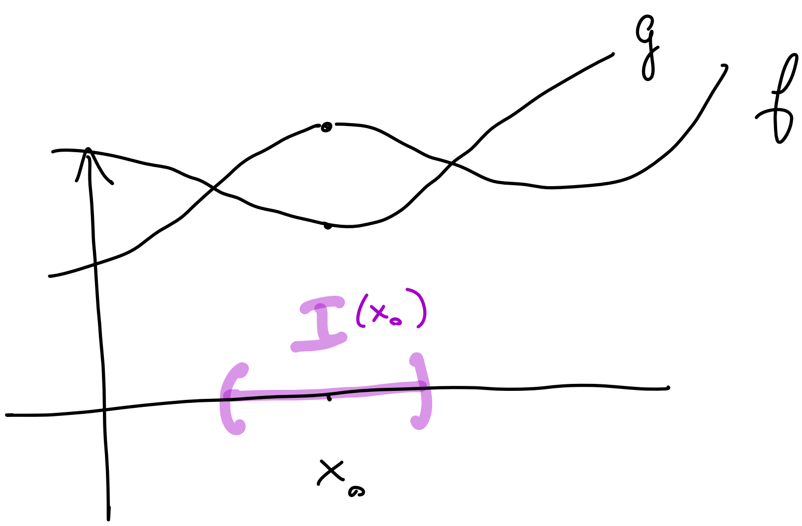
$$|\max(f(x), g(x)) - f(x_0)| < \varepsilon$$

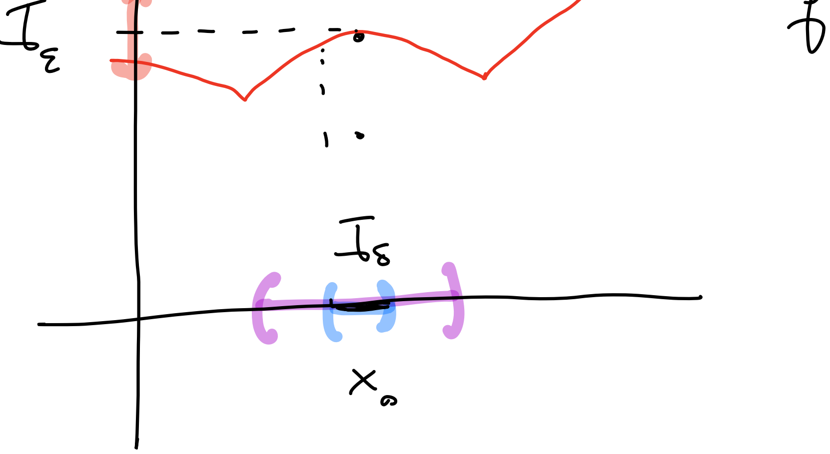
[ovviamente $\forall x$ fissato

- $\max(f(x), g(x)) = f(x)$
- $\max(f(x), g(x)) = g(x)$]

GRAFICAMENTE:

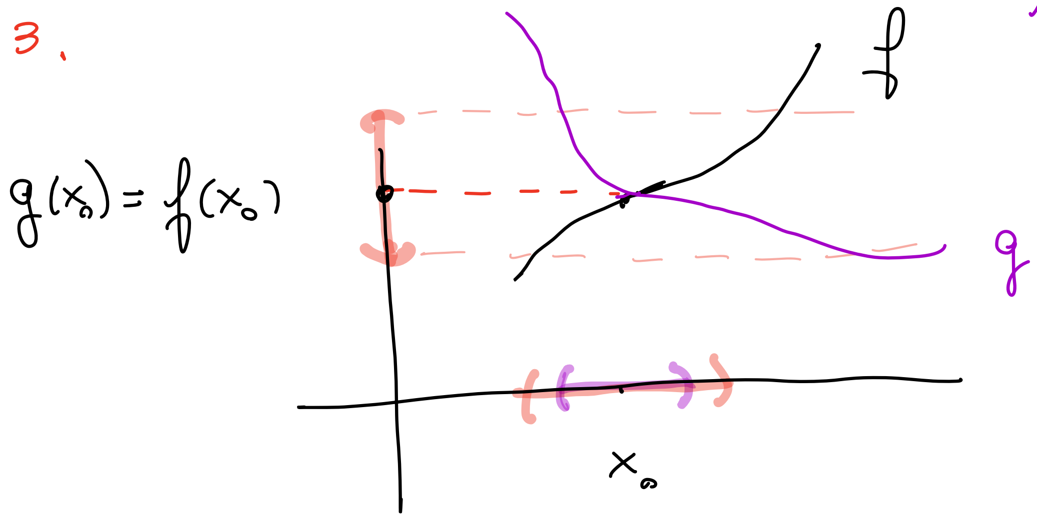
CASO 1.





(caso 2 è uguale)

CASO 3.



in viola $I_{\delta_2}(x_0)$

in rosso $I_{\delta_1}(x_0)$

in questo caso $\delta = \delta_2$

e si vede che sia f che g sono contenute nell'intorno $I_\varepsilon(f(x_0))$.