ESERCITAZIONE AM120
Esercizi sulle serie numeriche

31 marzo 2023

Esercizio 1. Discutere il comportamento delle seguenti serie numeriche:

(A) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

(B) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n} \quad (x \in \mathbb{R})$

(C) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{n^x} \quad (x \in \mathbb{R})$

(D) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}} \quad (x > 1)$

(E) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(x + \frac{1}{n}\right)^{\log n}} \quad (x \geq 0)$

(F) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x + n}{1 + n^3 x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

(G) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x + n^2}{n^{2x} + n^3} \quad (x \in \mathbb{R})$

PROPOSIZIONE 4.21

(i) **(Criterio del confronto)** Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri positivi e $c > 0$ tali che $a_n \leq c \cdot b_n$ definitivamente. Allora, se $\sum b_n$ converge, converge anche $\sum a_n$; se $\sum a_n$ diverge, diverge anche $\sum b_n$.

(ii) **(Criterio del confronto asintotico)** Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri positivi tali che $\lim a_n/b_n \in (0, +\infty)$. Allora $\sum a_n \approx \sum b_n$.

DIMOSTRAZIONE

4.3.2 Radice

PROPOSIZIONE 4.22 (Criterio della radice) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi.

(i) Se $a_n^{1/n} \leq \theta$ definitivamente per un qualche $0 < \theta < 1$, allora $\sum a_n$ converge. Se $a_n^{1/n} \geq \theta$ definitivamente per un qualche $\theta \geq 1$, allora $\sum a_n$ diverge.

(ii) Sia $\lim a_n^{1/n} = \theta \neq 1$ $(\theta \in \mathbb{R}^*)$. Se $\theta < 1$, $\sum a_n$ converge. Se $\theta > 1$, $\sum a_n$ diverge.

PROPOSIZIONE 4.25 (Criterio del rapporto) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi.

(i) Se $a_{n+1}/a_n \leq \theta$ definitivamente per un qualche $0 < \theta < 1$, allora $\sum a_n$ converge. Se $a_{n+1}/a_n \geq \theta$ definitivamente per un qualche $\theta \geq 1$, allora $\sum a_n$ diverge.

(ii) Sia $\lim a_{n+1}/a_n = \theta \neq 1$ $(\theta \in \mathbb{R}^*)$. Se $\theta < 1$, $\sum a_n$ converge. Se $\theta > 1$, $\sum a_n$ diverge.

PROPOSIZIONE 4.28 (Criterio di condensazione di Cauchy) Sia $\{a_n\}$ una successione decrescente di numeri positivi. Allora, $\sum a_n \approx \sum 2^n a_{2^n}$. Più precisamente, si ha:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(a_1 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \,, \tag{4.34}$$

dove le disuguaglianze vanno intese in $\mathbb{R}^*$.

(A) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

serie a termini positivi

se $\alpha < 0$ $\quad \dfrac{1}{n(\log n)^\alpha} > \dfrac{1}{n}$ $\quad (n \geq 2)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} \geq \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty .$$

per $\alpha > 0$ $\quad \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ è monotona decrescente.

Applico il criterio di condensazione di Cauchy

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} \approx \sum_{k=1}^{\infty} \cancel{2^k} \frac{1}{\cancel{2^k}(\log 2^k)^{\alpha}} =$$

$$= (\log 2)^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

diverge per $\alpha \leq 1$

converge per $\alpha > 1$

(questo lo potete dare per noto)

Dimostriamo anche questo per completezza

(di nuovo condensazione di Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \approx \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^{\alpha}} = \sum \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$$

per il criterio della radice converge per $\alpha > 1$

diverge altrimenti.

(B) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n} \quad (x \in \mathbb{R})$

Considero la convergenza assoluta.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} |x|^n$$

Applico il criterio della radice ($\sqrt[n]{n} \to 1$)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{5} |x| \longrightarrow \frac{|x|}{5}$$

quindi se $|x| < 5$ converge se $|x| > 5$ diverge

considero ora $|x| = 5$ (il crit. della radice NON da info)

se $x = 5$

$$\sum n^2 \quad \text{diverge}$$

se $x = -5$

$$\sum (-1)^n n^2 \quad \text{NON è regolare.}$$

$$(C)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{n^x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Dato che $\operatorname{sen} \frac{x}{n}$ è definitivamente positiva per $x > 0$ e definitivamente negativa per $x < 0$ considero la convergenza assoluta

se $x \neq 0$ $\quad \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{n}}{n^x} \right| \sim \frac{1}{n^x} \cdot \frac{|x|}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{n}}{n^x} \right| \approx |x| \sum \frac{1}{n^{x+1}}$$

converge per $x > 0$

diverge per $x < 0$

per $x = 0$ $\quad \sum \frac{\operatorname{sen}(0)}{n^{(0)}} = 0$

$$(D)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}} \quad (x > 1)$$

pongo $y = \log x$; $x > 1 \Rightarrow y > 0$

serie a termini positivi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y^{\log n}} = \sum e^{-\ln n \ln y} = \sum \frac{1}{n^{\ln y}}$$

$\Downarrow$

cioè $\ln y > 1$

$y > e \Rightarrow \log x > e \quad x > e^e$

$$\text{(E)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(x+\frac{1}{n}\right)^{\log n}} \quad (x \geq 0)$$

per $x \neq 0$

Voglio applicare il confronto asintotico

$$\left(x+\frac{1}{n}\right)^{\log n} = x^{\log n}\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{\log n}$$

ora $\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{\log n} = \left(1+\frac{1}{nx}\right)^{nx \cdot \frac{\log n}{nx}} = e^0 = 1$

quindi $\left(x+\frac{1}{n}\right)^{\log n} \sim x^{\log n}$

$$\sum \frac{n^2}{\left(x+\frac{1}{n}\right)^{\log n}} \approx \sum \frac{n^2}{x^{\log n}} = \sum \frac{n^2}{n^{\ln x}}$$

converge per $\boxed{\ln x - 2 > 1}$ $\quad x > e^3$

per $x=0$ $\quad \sum \frac{n^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\ln n}} = \sum n^2 \cdot n^{\ln n} = \infty$

$$\text{(F)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x+n}{1+n^3x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\frac{x+n}{1+n^3x^2} \sim \frac{1}{x^2}\frac{n}{n^3} \qquad \text{per } x \neq 0$$

$$\sum \frac{x+n}{1+n^3x^2} \approx \frac{1}{x^2} \sum \frac{1}{n^2} \qquad \text{converge per } x \neq 0$$

per $x=0$ viene $\sum n = \infty$.

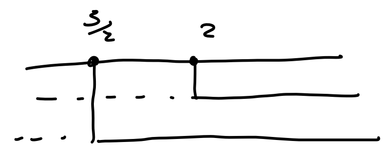
$$\text{(G)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x+n^2}{n^{2x}+n^3} \quad (x \in \mathbb{R})$$

se $\quad x < 2 \quad n^x + n^2 \sim n^2$

se $\quad x \geq 2 \quad n^x + n^2 \sim n^x$

x $\quad x > \frac{3}{2} \quad n^{2x} + n^3 \sim n^{2x}$

$x \le \frac{3}{2} \quad n^{2x} + n^3 \sim n^3$



se $\quad x \le \frac{3}{2}$

$$\sum \frac{n^x + n^2}{n^{2x} + n^3} \approx \sum \frac{n^2}{n^3}$$ diverge

per $\quad \frac{3}{2} < x < 2$

$$\sum \frac{n^x + n^2}{n^{2x} + n^3} \approx \sum \frac{n^2}{n^{2x}} = \sum \frac{1}{n^{2(x-1)}}$$ $x - 1 > \frac{1}{2}$

$x > \frac{3}{2}$

converge

pe $\quad x > 2$

$$\sum \frac{n^x + n^2}{n^{2x} + n^3} \approx \sum \frac{1}{n^x}$$ $x > 2$ converge!