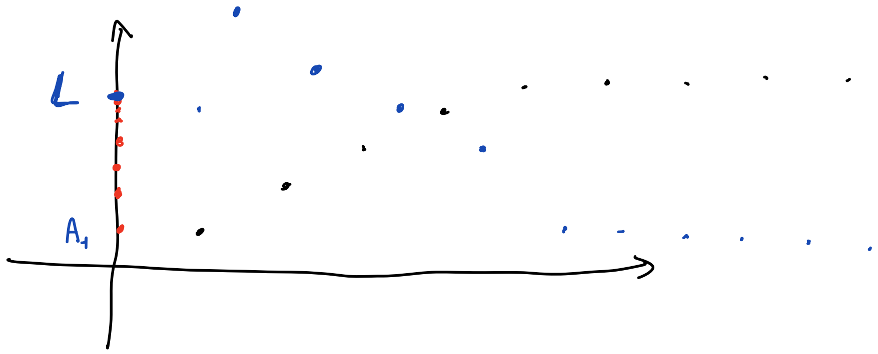


$A_k = \sup\limits_{n \geq k} \{a_n\}$ $\qquad$ $A_k \searrow$ quindi ha limite

$\lim\limits_{k \to \infty} A_k = \inf\limits_k A_k = L$

ora $\forall \varepsilon$, $\exists n \geq k$ tale che

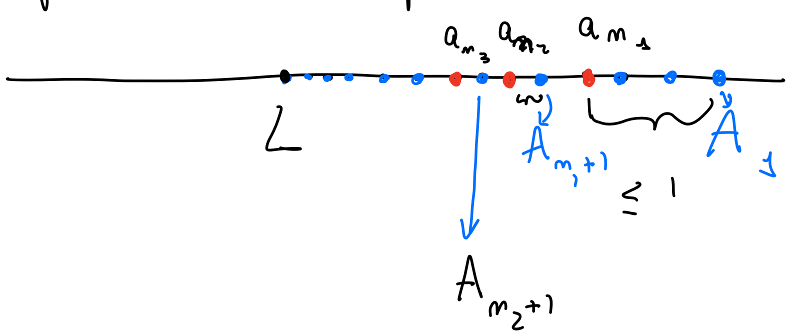
$A_k - \varepsilon \leq a_n \leq A_k$ $\qquad$ (dal fatto che A_k è il sup)

quindi:

scelgo $n_1 \geq 1$ $\quad A_1 - 1 \leq a_{n_1} \leq A_1$

(posso sicuramente per la definizione di sup)

(in blu gli A_k)



scelgo $n_2 > n_1$: $A_{n_1+1} - \frac{1}{2} \leq a_{n_2} \leq A_{n_1+1}$

(di nuovo per la definizione di sup)

scelgo $n_3 > n_2$: $A_{n_2+1} - \frac{1}{3} \leq a_{n_3} \leq A_{n_2+1}$

in generale scelgo $n_{k+1} > n_k$:

$$A_{n_k+1} - \frac{1}{k} \leq a_{n_{k+1}} \leq A_{n_k+1}$$

ora applico il teorema dei carabinieri

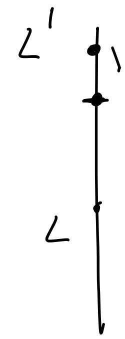
Se a_{n_k} tende a $L' > L$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu$: se $k > \nu$ $|a_{n_k} - L'| < \varepsilon$

quindi prendendo $\varepsilon = \frac{L'-L}{4}$

avrei che $\exists \nu$: se $k > \nu$

$$L' - \frac{L'-L}{4} < a_{n_k} < L' + \frac{L'-L}{4}$$



cioè $\qquad a_{n_k} \geq L + \frac{3}{4}(L'-L)$

per ogni $k > \nu$ quindi per ogni

$k > \nu \qquad A_{n_k} \geq L + \frac{3}{4}(L'-L)$

da cui

$$L = \lim_{k \to \infty} A_{n_k} \geq L + \frac{3}{4}(L'-L)$$

<u>ASSURDO</u>!

(non svolto in classe)

<u>Esercizio</u>: $\qquad \left\{\frac{n}{4}\right\} + \frac{1}{n^2} =: a_n$

(0) se $n_k = 4k$; $\quad a_{n_k} \to 0$

(1) $n_k = 4k+1 \qquad a_{n_k} \to \frac{1}{4}$

(2) $n_k = 4k+2 \qquad a_{n_k} \to \frac{1}{2}$

(3) $n_k = 4k+3 \qquad a_{n_k} \to \frac{3}{4}$

quindi $\limsup a_n = \frac{3}{4}$

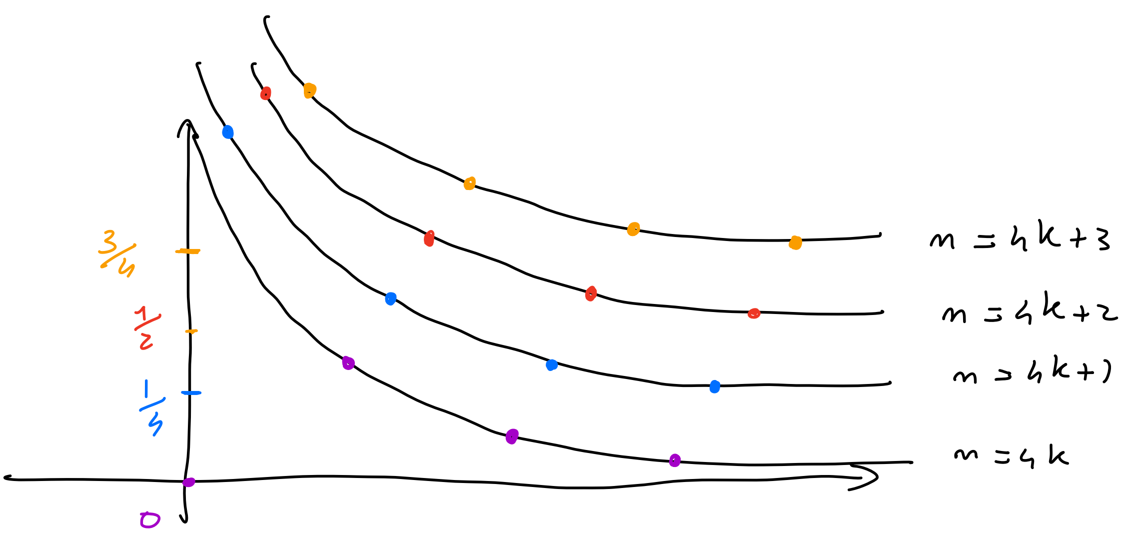
infatti dal fatto che la sottosuccessione

(3) $n_k = 4k+3$ tende a $\frac{3}{4}$

deduciamo $\limsup a_n \geq \frac{3}{4}$

D'altro canto non posso costruire

NESSUNA sottosucc n_k: $a_{n_k} \to \ell > \frac{3}{4}$



o .

ma) 20/6/2022

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x \log\left(1 + x^{2^n} + \operatorname{sen}\frac{x}{n}\right)}{1 + x^n}.$$

l'argomento del log è sempre positivo! $x = -1$ NON è definito!

se $x = 0$ $\sum \frac{1 \cdot \log(1)}{2} = 0$

se $|x| < 1$ $\ln\left(1 + \operatorname{sen}\frac{x}{n} + x^{2^n}\right) \sim \frac{x}{n}$ quindi

è positivo se x è positivo e negativo se $x < 0$

definitiv.

n^x e $1+x^n$ sono > 0

quindi la serie è a termini def. positivi (o negativi) $\frac{1}{1+x^n} \sim 1$

$$\approx \sum \frac{n^x x}{n} = x \sum \frac{1}{n^{1-x}}$$ converge

quindi $1-x>1$ e $|x|<1$ $\Rightarrow \boxed{-1<x\le 0}$

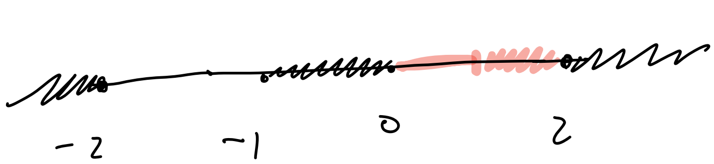
$0<x<1$ diverge

se $|x|>1$ studio la convergenza assoluta

$$\sum \left| \frac{n^x \ln\left(1+x^{2^n} + \sin\left(\frac{n}{x}\right)\right)}{1+x^n} \right| \approx \ln|x| \sum \left(\frac{2}{|x|}\right)^n n^x$$

quindi ho convergenza assoluta per $|x|>2$ (criterio della radice) $\boxed{e \ x=-2}$

(vedi sotto)



se $x>1$ la serie è a termini positivi

quindi NON conv ass $\Rightarrow$ Non CONV.

se $\quad -2 < x < -1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^x \ln\left(1 + x^{2^n} + \sin \frac{\cancel{x}}{\cancel{n}}\right)}{1+x^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \ln|x| \left(\frac{2}{x}\right)^n n^x \neq 0$$

quindi NON CONVERGE

se $\quad x = 1$

$$\sum \frac{n \ln\left(2 + \sin \frac{x}{n}\right)}{2} \qquad \text{NON CONVERGE!}$$

se $\quad x = 2$

$$\approx \sum \frac{n^2\, 2^n}{2^n} \qquad \text{NON CONVERGE}$$

se $\quad x = -2$

$$\sum \frac{n^{-2} \ln\left(1 + 2^{2^n} + \sin\frac{2}{n}\right)}{1 + (-1)^n 2^n} \approx \sum \frac{1}{n^2} < \infty .$$

converge absolutem.