In questa sezione I è un intervallo limitato.

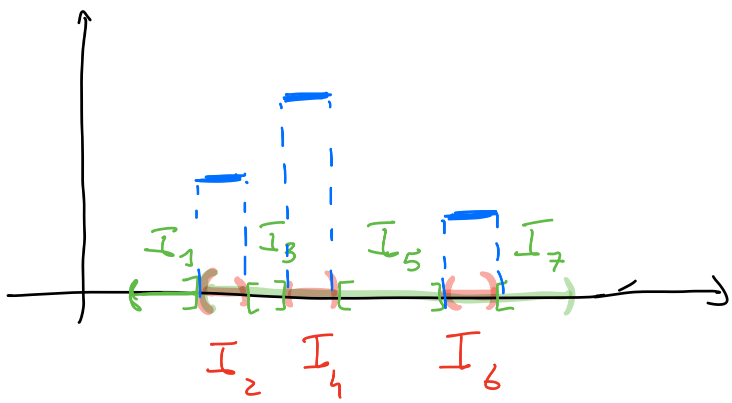
Definizione 1.18 *$f : I \to \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann (o 'Riemann integrabile') su I se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni $g, h \in S(I)$ tali che*

$$g \le f \le h\,, \qquad \int_I (h-g) < \varepsilon\,, \qquad (g,h \in S(I))\,. \tag{11}$$

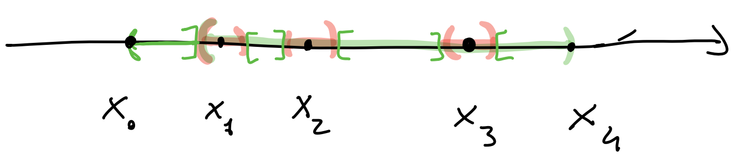
L'insieme delle funzioni Riemann integrabili su I si denota $\mathscr{R}(I)$.

$1 \le j \le n-1$.

Lemma 1.26 *Se $f \in S(I)$ esiste una partizione $P = \{I_j \big| 1 \le j \le n\} \in \mathscr{P}(I)$ e numeri reali α_j tali che $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{I_j}$.*



$f = \sum \alpha_{2k} \chi_{2k}$ semplicemente aggiungo gli intervalli verdi (in modo che sia una partizione) qui $m = 3$



$I_1 = [x_0, x_1] / I_2$; $I_3 = [x_1, x_2] / (I_2 \cup I_4)$

Proposizione 1.27 (Critertio di integrabilità per partizioni)
$f \in \mathscr{R}(I)$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $P = \{I_j \big| 1 \leq j \leq n\} \in \mathscr{P}(I)$ tale che

$$\sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f)|I_j| < \varepsilon\,. \tag{18}$$

Dato che $g(x) = \sum \sup_{x \in I_J} f \; \chi_{I_J} \in S_+$

e $h(x) = \sum \inf_{x \in I_J} f \; \chi_{I_J} \in S_-$

sono due funzioni semplici

$\int g - h < \varepsilon$ quindi

x definizione di integrabilità secondo Riemann.

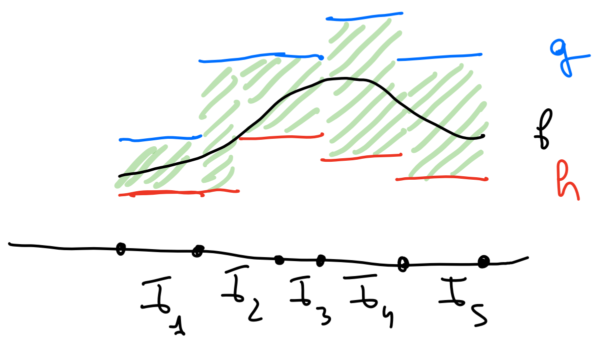
d'altro canto se f è integrabile

secondo Riemann allora $\forall \varepsilon > 0$

$\exists$ due funzioni semplici g, h

$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ e $\int g - h < \varepsilon$

ora possiamo sempre costruire una partizione comune $P(I) = I_1, I_2, \dots, I_m$



Area verde $< \varepsilon$

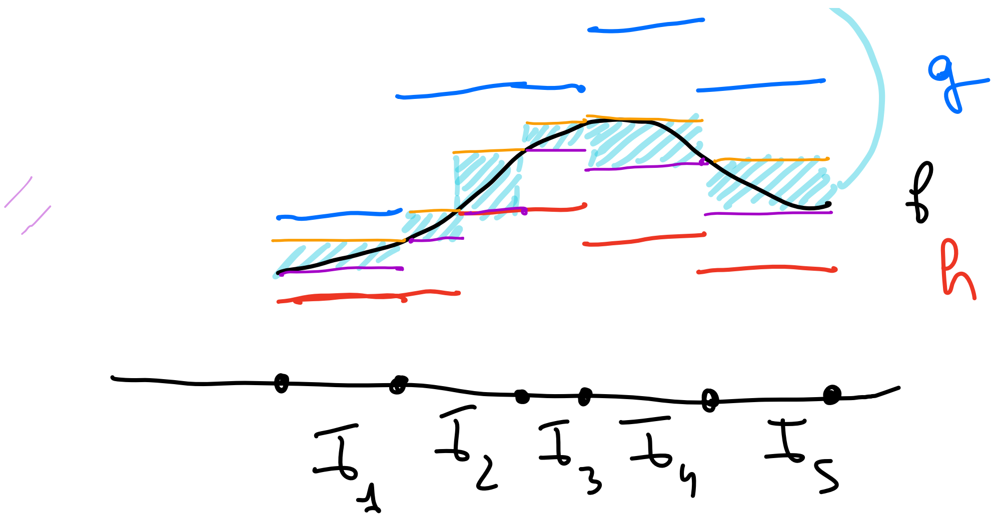
$$g(x) = \sum \alpha_J \chi_{I_J}(x)$$

$$h(x) = \sum \beta_J \chi_{I_J}(x)$$

se fisso $\hat{g}(x) = \sum \sup_{x \in I_J} \chi_{I_J}(x) \leq g(x)$

$$\hat{h}(x) = \sum \inf_{x \in I_J} \chi_{I_J}(x) \geq h(x)$$

$$\sum (\sup_{I_J} f - \inf_{I_J} f)|I_J| = \int \hat{g} - \hat{h} < \int g - h < \varepsilon$$



in viola ho segnato $\hat{h} \geq h$!

in giallo $\hat{g} \leq g$

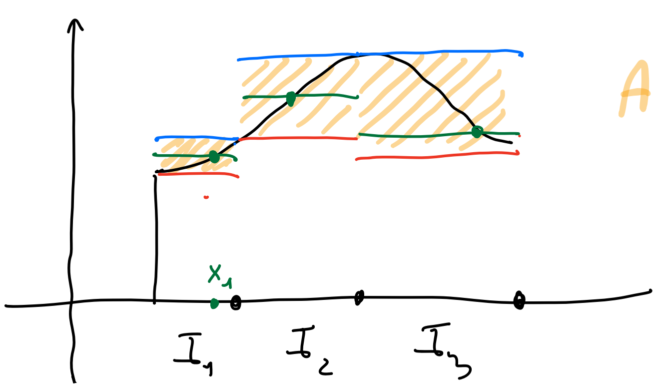
Area blu $\leq$ Area verde $< \varepsilon$

seguente

Proposizione 1.28 *Se $f \in \mathscr{R}(I)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $P = \{I_j\}$ di I tale che per ogni scelta di punti $x_j \in I_j$ si ha*

$$\left| \int_I f - \sum_{j=1}^{n} f(x_j)|I_j| \right| < \varepsilon\,. \tag{19}$$

La somma in (19) viene a volte chiamata *somma di Riemann* (rispetto alla partizione P e alla scelta di punti $\{x_j\}$).



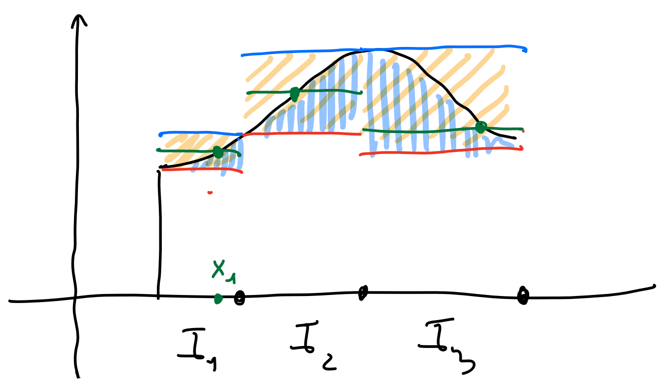
A gialla $< \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ P = \{I_J\}$ tale che

$$0 < \sum \left(\sup_{I_J} f - \inf_{I_J} f \right) |I_J| < \frac{\varepsilon}{2}$$ Area gialla

Inoltre (dato che f è integrabile)

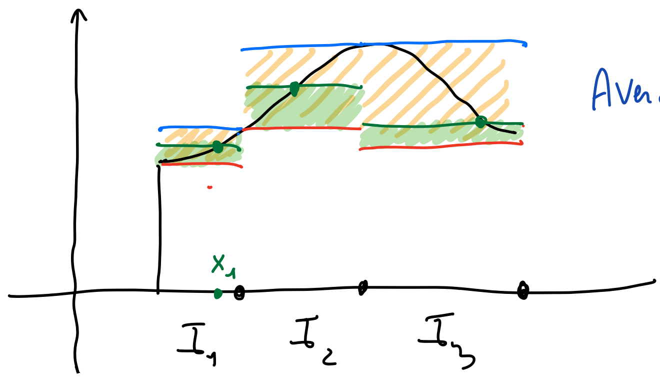
posso fare sì che



Area blu $< \frac{\varepsilon}{2}$

e $0 < \int f - \sum_J \inf_{I_J} f \, |I_J| < \frac{\varepsilon}{2}$

ma chiaramente $\forall$ scelta di $x_J \in I_J$



Avende $\leq$ A gialle $< \frac{\varepsilon}{2}$

$$\sum \left[f(x_J) - \inf_{I_J} f \right] |I_J| \leq \sum \sup_{I_J} f - \inf_{I_J} f \, |I_J| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \int f - \sum_J f(x_J) |I_J| \right| \leq$$

$$\left| \int f - \sum \inf f \, |I_J| \right| + \left| \sum \left(f(x_J) - \inf f \right) |I_J| \right| < \varepsilon$$

PROPOSIZIONE 8.19

(i) Sia E un intervallo limitato e $f : E \to \mathbb{R}$ limitata e continua. Allora $f \in \mathcal{R}(E)$.

(ii) Se f è lipschitziana su E (non degenere) con costante di Lipschitz[6] $L > 0$, allora:

$$\forall \varepsilon > 0\,, \forall \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E) \big| \operatorname{diam}(\mathrm{P}) < \frac{\varepsilon}{L|E|} \quad \text{si ha} \quad \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) < \varepsilon\,. \tag{8.33}$$

DIMOSTRAZIONE

(i) Se $E = [a,b]$ è chiuso (e quindi compatto) l'integrabilità di f è immediata. Infatti (assumendo $a < b$ per evitare banalità) per il Teorema di Heine–Cantor, f è uniformemente continua su E e, quindi, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ per ogni $x, y \in E$, $|x - y| < \delta$; il che implica, per (8.14), che $(\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Allora, se $\mathrm{P} = \{I_j\}$ è una *qualunque* partizione con $\operatorname{diam}(\mathrm{P}) < \delta$, si ha:

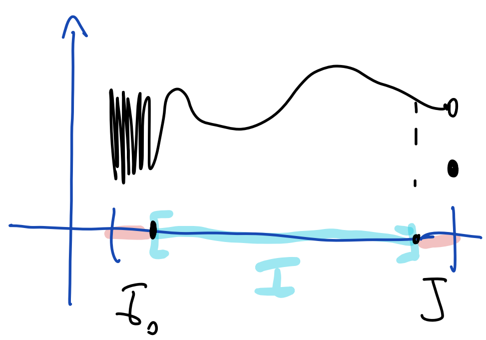
$$\overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) \overset{(8.13)}{=} \sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f)|I_j| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{n} |I_j| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,, \tag{8.34}$$

e quindi f è integrabile su E.

Consideriamo ora il caso in cui E non sia chiuso e f non costante[7]. Sia

Altrimenti

Posto $M = \sup_E f - \inf_E f$



in modo che $M(|I_0| + |J|) < \frac{\varepsilon}{2}$

ora in $\overline{E/(I_0 \cup J)} = I$ chiuso ; f è integrabile quindi $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P = \{I_j\}_{j=1}^{m}$

$$\sum (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) |I_j| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ma ora se pongo $I_{m+1} = J$; $\{I_j\}_{j=0}^{m+1}$ è una partizione di E

$$g(x) = \sum_{j=0}^{m+1} \sup_{I_j} f \, \chi_{I_j}$$

$$h(x) = \sum_{j=0}^{m+1} \inf_{I_j} f \, \chi_{I_j}$$

$$\int (g - h) = (\sup_{I_0} f - \inf_{I_0} f) |I_0| + \sum (\sup f - \inf f) I_j$$

$$+ (\sup_{I_{m+1}} f - \inf_{I_{m+1}} f) |I_{m+1}|$$

$$\leq M (|I_0| + |J_0|) + \sum (\sup f - \inf f) |I_j|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

(ii) Se f è lipschitziana su E (non degenere) con costante di Lipschitz[6] $L > 0$, allora:

$$\forall \varepsilon > 0\,, \forall \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E) \big| \ \operatorname{diam}(\mathrm{P}) < \frac{\varepsilon}{L|E|} \quad \text{si ha} \quad \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) < \varepsilon\,. \tag{8.33}$$

$\forall\, x, y \in I_J \qquad |f(x) - f(y)| \le L\,|x-y| \le L\,|I_J|$

~~ma~~ facendo $\sup\limits_{x \in I_J}$ e l'$\inf\limits_{y \in I_J}$

$\sup\limits_{I_J} f - \inf\limits_{I_J} f \le L\,|I_J|$ quindi

se $|I_J| < \dfrac{\varepsilon}{L|E|}$ $\forall J$ allora

$$\sum_{J=1}^{N} \left(\sup_{I_J} f - \inf_{I_J} f\right)|I_J| \le \frac{\varepsilon}{L|E|} \sum_{J=1}^{N} L\,|I_J|$$

(ricordando che $\sum\limits_{J=1}^{N} |I_J| = |E|$ ho la tesi)

LEMMA 8.20 Sia E un intervallo limitato e $f : E \to \mathbb{R}$ monotòna e limitata. Allora:

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}(f, I_j) \leq \operatorname{osc}(f, E), \qquad \forall \{I_j\} \in \mathcal{P}(E). \tag{8.36}$$

DIMOSTRAZIONE Poiché (Esercizio 8.2–(ii)) $\operatorname{osc}(-f, A) = \operatorname{osc}(f, A)$, possiamo assumere che f sia monotòna crescente. Osserviamo anche che il caso generale segue facilmente dal caso $n = 2$ (per induzione). Quindi consideriamo solamente il caso f crescente e $n = 2$.

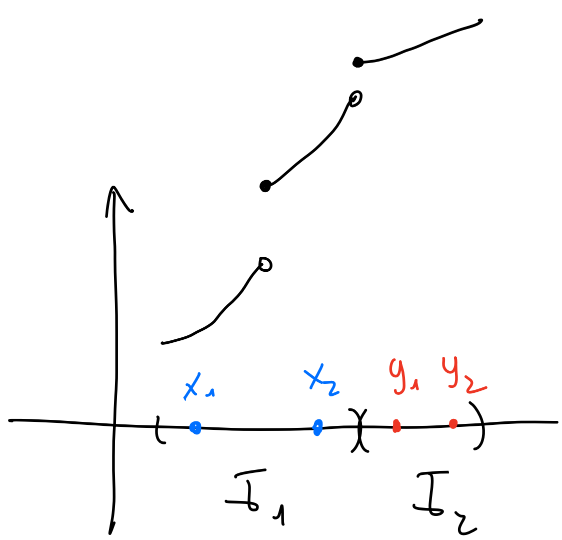
Se $x_1 \leq x_2 \leq y_1 \leq y_2$ con $x_1, x_2 \in I_1$ e $y_1, y_2 \in I_2$, essendo $f(x_2) - f(y_1) \leq 0$, si ha che:

$$f(x_2) - f(x_1) + f(y_2) - f(y_1) \leq f(y_2) - f(x_1) \leq \operatorname{osc}(f, E). \tag{8.37}$$

Prendendo il sup su $x_1, x_2 \in I_1$ e $y_1, y_2 \in I_2$ si ottiene la tesi. ∎

il punto è che $\operatorname{osc}(f, I_J) = \sup_{I_J} f - \inf_{I_J} f$

se prendo $x_1 \leq x_2$ se $I_J = [a_J, b_J]$



Teorema fond. del calcolo integrale

TEOREMA 8.23 (Teorema fondamentale del calcolo – parte I) Sia E un intervallo, $x_0 \in E$ e $f \in \mathcal{R}(E)$ continua in $y \in E$. Allora, la funzione integrale $x \to F(x) := F(x; x_0)$ è derivabile in y e si ha $F'(y) = f(y)$.

DIMOSTRAZIONE Calcoliamo il rapporto incrementale di F in y: per ogni h tale che $y + h \in E$ si ha:

$$\begin{aligned}\frac{F(y+h)-F(y)}{h} &\overset{(8.40)}{=} \frac{1}{h}\Big(\int_{x_0}^{y+h} f - \int_{x_0}^{y} f\Big) \overset{(8.28)}{=} \frac{1}{h}\Big(\int_{x_0}^{y+h} f + \int_{y}^{x_0} f\Big) \\ &\overset{(8.29)}{=} \frac{1}{h}\int_{y}^{y+h} f = f(y) + \frac{1}{h}\int_{y}^{y+h} (f - f(y)) \\ &= f(y) + \alpha(h)\,, \qquad \text{con} \quad \alpha(h) := \frac{1}{h}\int_{y}^{y+h} (f - f(y))\,.\end{aligned}$$

La tesi è dunque equivalente a mostrare che $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$ e questo segue dalla continuità di f in y (ipotesi che ancora non abbiamo usato). Sia $\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per ogni $x \in E$ con $0 < |x - y| < \delta$, sia $0 < |h| < \delta$ (con $y + h \in E$) e sia $I_h \subseteq E$ l'intervallo aperto di estremi y e $y + h$. Se $x \in I_h$, si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dunque:

$$|\alpha(h)| = \frac{1}{|h|}\Big|\int_{I_h} (f - f(y))\Big| \le \frac{1}{|h|}\int_{I_h} |f - f(y)| \le \frac{1}{|h|}\int_{I_h} \varepsilon = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

COROLLARIO 8.25 (Teorema fondamentale del calcolo – parte II) Sia f una funzione continua su un intervallo E.

(i) Per ogni $x_0 \in E$ la funzione integrale F in (8.40) è una primitiva di f su E.

(ii) Se $G : E \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f su E e F è la funzione integrale in (8.40), allora:

$$G(x) = G(x_0) + F(x; x_0)\,, \qquad \forall x \in E\,. \tag{8.41}$$

Inoltre, per ogni $a, b \in E$, si ha:

$$\int_a^b f = G(b) - G(a) = [G]_a^b\,. \tag{8.42}$$

(iii) Se $g \in C^1(E)$, allora, per ogni $a, b \in E$, si ha:

$$\int_a^b g' = g(b) - g(a) = [g]_a^b\,. \tag{8.43}$$

Dimostrazione

(i) È conseguenza immediata della Proposizione 8.19 e del Teorema 8.23.

(ii) Poiché G e F sono due primitive di f, si ha che $G = F + c$ per una costante c; ma $F(x_0, x_0) = 0$ e quindi $G(x_0) = c$ e (8.41) segue. Infine, poiché F e G differiscono per una costante, si ha $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ e, dunque:

$$G(b) - G(a) = F(b; x_0) - F(a; x_0) = \int_{x_0}^b f - \int_{x_0}^a f = \int_{x_0}^b f + \int_a^{x_0} f = \int_a^b f\,.$$

(iii) Segue immediatamente da (8.42) con $f = g'$ e $G = g$ (essendo, ovviamente, g una primitiva di g'). Si noti che, poiché $a, b \in E$, g' è continua sull'intervallo chiuso I di estremi a e b (e quindi integrabile su I). ∎