DEFINIZIONE 6.45

Una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ si dice **uniformemente continua** su E se:

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,, \quad \forall\, x, y \in E\,,\ |x - y| < \delta\,. \tag{6.17}$$

Uniformemente continue sono le funzioni *hölderiane*.

DEFINIZIONE 6.46

(i) Una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ si dice **hölderiana con esponente** $\alpha > 0$ in $y \in E$ se esiste $M > 0$ tale che vicino a y si ha:

$$|f(x) - f(y)| \le M\,|x - y|^{\alpha}\,. \tag{6.18}$$

Una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ è **hölderiana su** E se esiste $M > 0$ tale che (6.18) vale per ogni $x, y \in E$.

(ii) Una funzione hölderiana (in y o su E) con esponente $\alpha = 1$ si dice **lipschitziana** (in y o su E).

Infatti, se f è hölderiana su E, la (6.17) segue prendendo $\delta := (\varepsilon/M)^{1/\alpha}$.

Una condizione sufficiente per la uniforme continuità di una funzione continua è che il dominio sia compatto.

TEOREMA 6.47 (Heine–Cantor) Sia $f \in C(K)$ con K compatto. Allora, f è uniformemente continua su K.

PROPOSIZIONE 6.48 Sia $f : E \to \mathbb{R}$ uniformemente continua su E.

(i) Se $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in E, allora lo è anche $\{f(x_n)\}$.

(ii) Se $y \in \mathcal{D}E$, allora esiste finito il $\lim_{x \to y} f(x)$.

x. L'insieme dei punti di accumulazione di un insieme A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^*$ che prende il nome di **derivato** di A e si denota con $\mathcal{D}^*A$; l'insieme dei punti di accumulazione finiti (ossia in $\mathbb{R}$) di A si denota con $\mathcal{D}A := \mathcal{D}^*A \cap \mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE 6.49 Sia $f : [0, +\infty)$ uniformemente continua. Allora, esiste $a, b \geq 0$ tali che $|f(x)| \leq ax + b$ per ogni $x \geq 0$.

PROPOSIZIONE 6.51 Sia f uniformemente continua su E. Allora esiste un'unica estensione continua $\tilde{f}$ a $\overline{E}$ e

$$\tilde{f}(y) = \lim_{x \to y} f(x), \qquad \forall\, y \in \mathcal{D}E \setminus E. \tag{6.20}$$

COROLLARIO 6.52 Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato.

(i) Una funzione f è uniformemente continua su E se e solo se f è la restrizione di una funzione $\tilde{f}$ continua su $\overline{E}$.

(ii) Sia $f \in C(E)$. Allora f è uniformemente continua su E se e solo se esiste finito $\lim_{x \to y} f(x)$ per ogni $y \in \mathcal{D}E \setminus E$.

(iii) Sia f uniformemente continua su E. Allora f è limitata.

~~DIMOSTRAZIONE~~

Esercizi: (Riscaldamento)

$f(x) = x^{4/3}$ è uniformemente continua su $[0,1]$? su $\mathbb{R}$? su $\mathbb{Q} \cap [0,1]$?

① MOLTO ISTRUTTIVO:

Esercizio 6.12 Sia $f : E \to \mathbb{R}$. Si dimostri che se esiste $a > 0$ e $x_n, y_n \in E$ tali che $x_n < y_n$, $\lim(y_n - x_n) = 0$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq a$ per ogni n, allora f non è uniformemente continua su E.

NB. basta definitivamente!

Svolgimento: x assurdo supponiamo che esistono le due successioni x_n, y_n descritte sopra e f sia uniformemente continua:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: se $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

prendiamo per esempio $\varepsilon = \frac{a}{2}$

allora $\exists \delta$: se $|x-y| < \delta \quad |f(x) - f(y)| < \frac{a}{2}$

ma dato che $y_n - x_n \to 0 \quad \forall \delta > 0$

$\exists N$: se $n \geq N \quad |y_n - x_n| < \delta$ e quindi

$a < |f(y_n) - f(x_n)| < \frac{a}{2}$ che è ASSURDO!

Esercizio 6.13 Si dimostri che $f(x) = 1/x$ non è uniformemente continua su (0,1) senza usare il Corollario 6.52.

per esempio uso 6.48 (i) prendo

$x_n = \frac{1}{n}$ (ovviamente è di Cauchy dato che è convergente) $f(x_n) = \frac{1}{x_n} = n$ NON è di Cauchy!

Oppure direttamente: NON unif. continua

vuol dire che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall \delta > 0$ trovo

$x(\delta), y(\delta)$: $|x-y| < \delta$ ma $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$

$$|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \frac{|y-x|}{|x||y|} < \frac{\delta}{|x||y|} < \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad \delta < \varepsilon |x||y|$ ora se $x, y \to 0$ $\delta \to 0$!

quindi prendo x esempio $\varepsilon = \frac{1}{2}$ fisso $2 > \delta > 0$

prendo $x = \frac{\delta}{2}$, $y = \delta$ $|y-x| < \delta$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{\delta} \nearrow \infty \quad \text{se} \quad \delta \to 0$$

Esercizio 6.16 Si discuta l'uniforme continuità di $f(x) = x \operatorname{sen} x$ su $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.17 Si discuta l'uniforme continuità di $f(x) = \cos x^2$ su $\mathbb{R}$.

in entrambe i casi si tratta di funzioni oscillanti in cui la derivata non è limitata (provo a far vedere che NON sono unif. continue)

Uso l'esercizio 6.12

in 6.16 prendo $x_n = 2n\pi$ e $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$

si ha $y_n - x_n \to 0$ ma

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) \operatorname{sen} \frac{1}{n} \quad \text{che è}$$

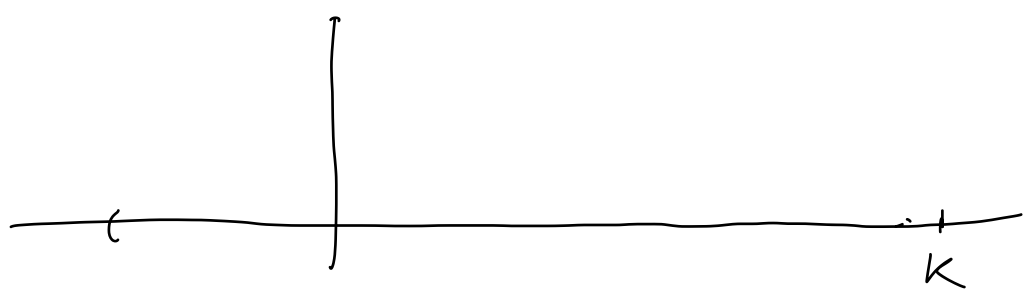
definitivamente > 1 (dato che il limite è 2π)

In 6.17 prendo $x_n = \sqrt{2\pi n}$ $\quad y_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$

$\cos(x_n^2) = 1 \qquad \cos(y_n^2) = 0$

ma $y_n - x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} - \sqrt{2\pi n} = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} + \sqrt{2\pi n}} \to 0$

Esercizio 6.15 Sia $f \in C(E)$ con E chiuso, limitato inferiormente ma non limitato superiormente. Si dimostri che se esiste finito il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, allora f è uniformemente continua su E.



$\forall\ K > 0$ f è unif continua in $E \cap (-\infty, K]$

Dato che $\lim_{x \to \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ $\quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M(\varepsilon) > 0$.

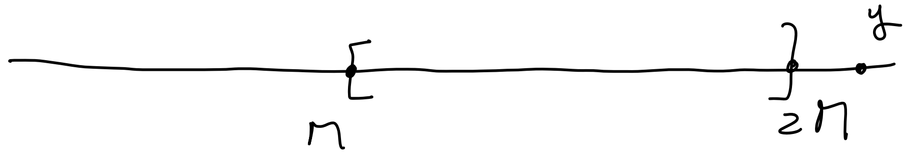
se $x > M(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

quindi prendo $\varepsilon > 0$ e fisso $M = M(\frac{\varepsilon}{2})$

in modo che se $x > M(\frac{\varepsilon}{2})$: $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

se anche $y > M(\frac{\varepsilon}{2})$ allora

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| < \varepsilon$$



quindi se $x, y > M(\frac{\varepsilon}{2})$ va bene

qualsiasi scelta di $\delta > 0$ d'altro canto se

$x, y < 2M(\frac{\varepsilon}{2})$ allora dato che f

è unif continua in $[-\infty, 2M] \cap E$

deve $\exists\ \delta(\varepsilon)$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ se $|x-y| < \delta$.

Resta da considerare il caso in cui o

x o $y > 2M(\frac{\varepsilon}{2})$. Supponiamo che $y > x$

se prendiamo $\delta = \frac{M}{2}$ allora $|x-y| < \delta$

~~sempre~~ e $y > 2M \Rightarrow x > M$ quindi

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \;.$$

* **Esercizio 6.20** Dare un esempio di funzione continua e limitata su (0,1] e tale che non esiste una estensione continua su [0,1].

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (il limite non esiste)