Appello A **Esame AM120-Analisi Matematica 2 – (AA 2022/23 – L. Chierchia) 19/6/2023**

Punteggi: Es 1[pt 35]; **Es 2**[pt 25]; **Es 3**[pt 20]; **Es 4**[pt 10]; **Es 5**[pt 10]

Es 1 Discutere al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{x^{2n}}{n^{\sqrt{2}}} + \operatorname{sen}(x^n\, n^x) \Big)$.

Es 2 Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza degli integrali impropri: (i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\log x|}{(\cos x)^\alpha}\, dx$; (ii) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{(|\cos x| \operatorname{senh} x^{-1})^\alpha}{\arctan(x-\pi/2)}\, dx$.

Es 3 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ con $f(x) = \dfrac{\cosh x - \sqrt{1+x^2}}{\operatorname{sen} x^2 - (\arctan x)^2}$.

Es 4 Calcolare massimo e minimo limite di $a_n = \big(\operatorname{sen}(n^2\pi/4)\big)\big(\cos(n\pi/3)\big)$.

Es 5 Discutere l'uniforme continuità della funzione $f(x) = e^{-1/x}\cos(1/x^2)$ su $(0,1)$ e su $(1,+\infty)$.

Es 1 Studiamo separatamente le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^{\sqrt{2}}}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(x^n\, n^x)$. La prima serie è a termini positivi e (criterio della radice) converge per $|x|<1$ mentre il termine generico tende a $+\infty$ se $|x|>1$; la serie converge anche per $x=\pm 1$ (zeta di Riemann con $\alpha > 1$). La seconda serie ha termini limitati e quindi la serie completa non converge se $|x|>1$; per $|x|<1$, $\sum|\operatorname{sen}(x^n\, n^x)| \approx \sum |x|^n\, n^x$, e quindi la serie converge assolutamente per $|x|<1$; per $x=1$ la serie non converge ($\operatorname{sen} n$ non tende a zero per $n\to+\infty$), mente per $x=-1$ la serie converge per Leibnitz. In conclusione, la serie completa converge assolutamente per $|x|<1$, converge semplicemente per $x=-1$ non converge negli altri casi.

Es 2 (i) $\displaystyle\int_0^{3/2} \frac{|\log x|}{(\cos x)^\alpha}\, dx \approx \int_0^{3/2} |\log x| < +\infty$ (per ogni α).

$$\int_{3/2}^{\pi/2} \frac{|\log x|}{(\cos x)^\alpha}\, dx \approx \int_{3/2}^{\pi/2} \frac{1}{(\cos x)^\alpha}\, dx = \int_0^{(\pi-3)/2} \frac{1}{(\operatorname{sen} t)^\alpha}\, dt \approx \int_0^{(\pi-3)/2} \frac{1}{t^\alpha}\, dt < +\infty \text{ se e solo se } \alpha < 1.$$

In conclusione, l'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$

(ii) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2} \frac{(|\cos x| \operatorname{senh} x^{-1})^\alpha}{\arctan(x-\pi/2)}\, dx \approx \int_{\pi/2}^{2} \frac{|\cos x|^\alpha}{\arctan(x-\pi/2)}\, dx = \int_{\pi/2}^{2} \frac{|\operatorname{sen}(x-\pi/2)|^\alpha}{\arctan(x-\pi/2)}\, dx \approx \int_{\pi/2}^{2} |x-\pi/2|^{\alpha-1} < +\infty$ se e solo se $\alpha > 0$.

$$\int_2^{+\infty} \frac{(|\cos x| \operatorname{senh} x^{-1})^\alpha}{\arctan(x-\pi/2)}\, dx \approx \int_2^{+\infty} \frac{|\cos x|^\alpha}{x^\alpha}\, dx < +\infty \text{ se e solo se } \alpha > 1.$$

In conclusione, l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$.

Es 3 $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)$; $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + O(x^6)$; $\operatorname{sen} x^2 = x^2 + O(x^6)$; $(\arctan x)^2 = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + O(x^6)$. Quindi il limite cercato è $1/4$.

Es 4 a_n è una funzione (di n) di periodo 6, calcolando i primi 6 valori per $0 \le n \le 5$ si trova che il massimo di tali valori è $a_1 = 1/(2\sqrt{2})$ e il minimo è $a_3 = -1/\sqrt{2}$; quindi prendendo $n_k = 1+6k$ e $m_k = 3+6k$ si vede che $\limsup a_n = 1/(2\sqrt{2})$ e $\liminf a_n = -1/\sqrt{2}$.

Es 5 $f \in C((0,+\infty))$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ dunque f è uniformemente continua su $(0,+\infty)$ (e ogni suo sottoinsieme).