Appello C **Esame AM120-Analisi Matematica 2 – (AA 2022/23 – L. Chierchia) 15/1/2024**

Nome:________________ **Cognome:**________________ **Matricola.:**________________

Punteggi: Es 1[pt 35]; **Es 2**[pt 25]; **Es 3**[pt 25]; **Es 4**[pt 15]

Es 1 Discutere al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh x}{x^n + 3^{-n}}$.

Es 2 Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^\alpha)}{1+x^{3/2}}\, dx$.

Es 3 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x)$ con $f(x) = \dfrac{\cosh\sqrt{x} - e^{x/2}}{\cos x - 1}$.

Es 4 Calcolare massimo e minimo limite di $a_n = n\,\mathrm{sen}(n\pi/2024)$.

Soluzioni

Es 1 La serie non è definita per $x = -1/3$. Per $x = 0$ è la serie nulla. Per $x \neq 0, -1/3$ e $|x| \le 1$, il termine generico non tende a zero e quindi la serie non converge (Cauchy). Per $|x| > 1$, $\displaystyle\left|\frac{\tanh x}{x^n + 3^{-n}}\right|^{1/n} \to \frac{1}{|x|} < 1$ e la serie converge assolutamente. Conclusione: la serie converge assolutamente su per $\{|x| > 1\} \cup \{0\}$ e non converge su $\{x \big| x \neq 0, -1/3, |x| \le 1\}$.

Es 2 Consideriamo prima l'intervallo $(0,1)$: poichè $(1+x^{3/2})^{-1}$ è continua in $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x^\alpha)}{1+x^{3/2}}\, dx \approx \int_0^1 \log(1+x^\alpha)\, dx$; per $\alpha \ge 0$, $\log(1+x^\alpha)$ è continua e quindi l'integrale converge; per $\alpha < 0$, $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x^\alpha)\, dx \approx \int_0^1 \log(1/x)\, dx$ (per confronto asintotico poiché $\lim_{x\to 0+} \log(1+x^\alpha)/\log(1/x) = |\alpha|$) e $\displaystyle\int_0^1 \log(1/x)\, dx = \int_1^\infty (\log t)/t^2 < +\infty$.
Poiché $\forall \alpha$, esiste $M > 0$ tale che $|\log(1+x^\alpha)| \le M x^{1/4}$, per ogni $x \ge 1$, l'integrale su $[1,+\infty)$ converge per ogni α per confronto con $1/x^{5/4}$. Conclusione: l'integrale converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Es 3 $\cosh\sqrt{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + O(x^3)$; $e^{1/x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + O(x^3)$, $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + O(x^4)$; conclusione $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x) = 1/6$.

Es 4 Se $n_k = 1012 + 4048 \cdot k$, $a_{n_k} = n_k \to +\infty$; se $m_k = -1012 + 4048 \cdot k$, $a_{m_k} = -m_k \to -\infty$; conclusione $\limsup a_n = +\infty$, $\liminf a_n = -\infty$.