Appello X **Esame AM120-Analisi Matematica 2 – (AA 2022/23 – L. Chierchia) 12/9/2023**

Nome:____________________ **Cognome:**____________________ **Matricola.:**____________________

Punteggi: Es 1[pt 35]; **Es 2**[pt 25]; **Es 3**[pt 20]; **Es 4**[pt 10]; **Es 5**[pt 10]

Es 1 Discutere al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n^{nx}}{n!} + \frac{1}{\log(1+n)} \arctan \frac{x^n}{x^{2n}+1} \Big)$.

Es 2 Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\log(1+x^\alpha)}\,dx$.

Es 3 Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ con $f(x) = \dfrac{e^{-x^2/4} - \sqrt{\cos x}}{(\tanh x^2)\cdot \log(\cosh x)}$.

Es 4 Calcolare massimo e minimo limite di $a_n = \Big\{\dfrac{n}{4}\Big\}\Big\{1 - \dfrac{n}{4}\Big\}$, dove $\{x\}$ denota la parte frazionaria di x.

Es 5 Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = e^{x^\alpha}$ è uniformemente continua sui seguenti domini: $A = (-\infty, 0)$, $B = (0, +\infty)$, $C = \{x \big| 0 < |x| < 1\}$.

Soluzioni

Es 1 La prima serie (a termini positivi) converge per $x < 1$ e diverge per $x \geq 1$ (rapporto); la seconda serie converge assolutamente per $x \neq \pm 1$ (confronto asintotico e radice), diverge per $x = 1$ e converge condizionatamente (Leibniz) per $x = -1$. In conclusione, la serie converge per $x < 1$ (assolutamente per $x < 1$ e $x \neq -1$, condizionatamente per $x = -1$).

Es 2 L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\log(1+x^\alpha)}\,dx$ converge (assolutamente) se e solo se $\alpha < 2$; l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\log(1+x^\alpha)}\,dx$ converge se e solo se $\alpha > 0$ (integrazione per parti). In conclusione, l'integrale converge se e solo se $0 < \alpha < 2$.

Es 3 $e^{-x^2/4} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{32} + O(x^6)$; $\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + O(x^6)$; $\tanh x^2 = x^2 + O(x^6)$; $\log(\cosh x) = \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ e quindi il limite cercato è $\frac{1}{12}$.

Es 4 $a_{n+4} = a_n$, e $\{a_n : 1 \leq n \leq 4\} = \{0, 3/16, 14\}$. Quindi, $\limsup a_n = 1/4 = \lim a_{2+4k}$ e $\liminf a_n = 0 = \lim a_{4k}$.

Es 5 Per $\alpha = 0$ la funzione è costante e quindi uniformemente continua su $\mathbb{R}$. Assumiamo $\alpha \neq 0$. Su B la funzione è non è uniformemente continua per $\alpha \neq 0$ (per $\alpha > 0$ la funzione è superlineare; per $\alpha < 0$, è illimitata vicino a 0). Se $x < 0$, assumiamo $\alpha \in \mathbb{Z}$ (altrimenti la funzione potrebbe non essere definita). In tal caso su A non è uniformemente continua e su C lo è.