- **Binomio di Newton**

**Definizione [redacted]** (i) *Dato $n \in \mathbb{N}$, $n$* **fattoriale** *è definito come* $\prod_{k=1}^{n} k$, *ossia:*

$$n! = \begin{cases} 1 \,, & \text{se } n = 0 \,, \\ n \cdot (n-1)! \,, & \text{se } n \geq 2 \,. \end{cases}$$ [redacted]

*Si pone anche, per definizione,*

$$0! = 1 \,.$$ [redacted]

(ii) *Siano $n, k \in \mathbb{N}_0$ con $k \leq n$. Si chiama* **coefficiente binomiale** $n$ **sopra** $k$ *il numero*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$ [redacted]

Le proprietà principali del coefficiente binomiale sono raccolte nel seguente

Lemma:

(1) $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}_0$

(ii) $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \qquad \forall\, m, k \in \mathbb{N}_0 : \; k \leq m$

(iii) $\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \qquad \forall\, m, k \in \mathbb{N}_0 \quad 1 \leq k \leq m$

Dim: (i) e (ii) si verificano in modo diretto.

(iii) Ricordo che per definizione $h! = h\,(h-1)!$ $\forall\, h \in \mathbb{N}$

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} + \frac{m!}{(k-1)!\,(m-(k-1))!}$$

ora $\quad k! = k(k-1)!$

$$[n-(k-1)]! = (n-k+1)! = (n-k+1)(n-k)!$$

quindi:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} =$$

$$\frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} =$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right] =$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)}\right] =$$

$$\frac{(n+1)\,n!}{k(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} \qquad \blacksquare$$

Le proprietà (i) − (iii) dicono che

i coeff. binomiali riempiono il

triangolo di Tartaglia

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \leftarrow n=0 \ (k=0) \\
 & & & 1 & & 1 & & & \leftarrow n=1 \ (k=0,1) \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
1 \ \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{k-1} \ \binom{n}{k} \cdots \binom{n}{n-1} \ 1 \qquad \leftarrow \text{riga } n \\
1 \ \binom{n+1}{1} \cdots \qquad \binom{n+1}{k} \qquad \cdots \qquad 1
\end{array}
$$

Corollario: $\binom{n}{k} \in \mathbb{N} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}_0 \quad 0 \le k \le n$

Dimostriamo per induzione su $n$

Per $n = 0$ e $n = 1$ è vera

$$\binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$$

Supponiamo che la propr. sia vera

fino ad un certo $n$ cioè:

$\binom{j}{h} \in \mathbb{N}$ per ogni $j, h \in \mathbb{N}_0$ tale che

$0 \leq h \leq j \leq n$

Dimostriamo che $\forall\ 0 \leq k \leq n+1$

$\binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}$

① se $k = 0$ o $k = n+1$ segue da (i)

② se $1 \leq k \leq n$ posso applicare (iii)

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

ora sia $\binom{n}{k}$ che $\binom{n}{k-1}$ sono della

forma $\binom{j}{h}$ con $0 \leq h \leq j \leq n$

quindi $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ e $\binom{n}{k-1} \in \mathbb{N}$

dato che la somma di numeri naturali

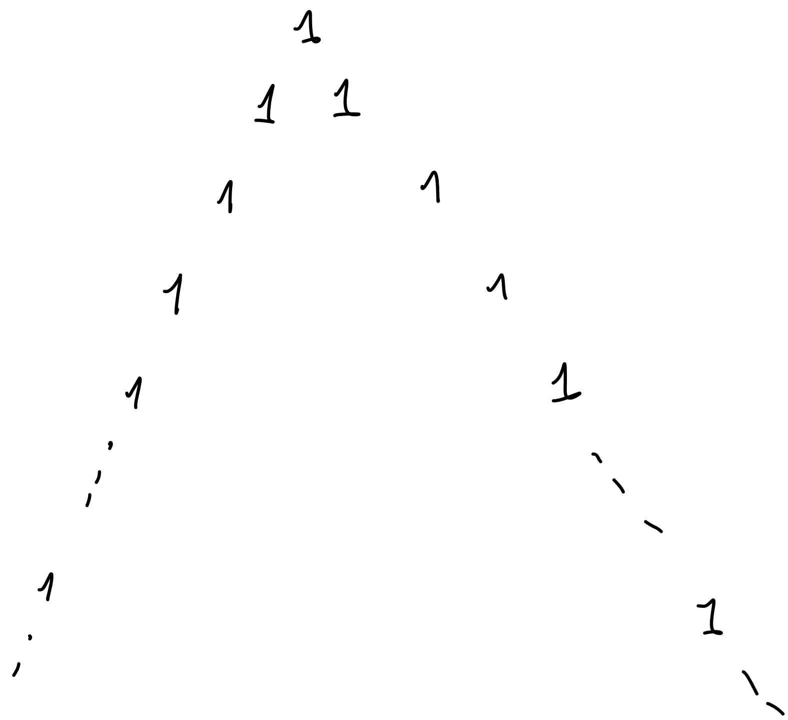
è naturale $\binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}$ $\blacksquare$

Intuizione: (triangolo di Tartaglia)

Da (i) so che

$\binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$

e $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \ \forall n$



Per induzione suppongo di sapere che

tutte le righe fino ad $n$ sono

composte da numeri naturali

(devo dimostrare la stessa cosa per la riga $n+1$)

$$1 \quad 1 \qquad \text{tutti in } \mathbb{N}$$

$$n \longrightarrow \quad 1 \quad \binom{n}{1} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-1} \quad 1$$

$$n+1 \longrightarrow \quad \boxed{1} \qquad\qquad\qquad\qquad \boxed{1}$$

per la proprietà (i)

tutti gli altri per (iii)

sono somma di due elementi della riga sopra quindi sono naturali ∎

Proposizione.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Dimostrazione (per induzione)

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$$

$$(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0$$

Vera per $n = 0, 1$

Supponiamo induttivamente che

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{allora}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

(voglio raccogliere le due sommatorie mettendo assieme i termini che hanno la "stessa parte letterale")

Nella I sommatoria $k+1 = h$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^h b^{n+1-h}$$

Per comodità uso $h$ anche nella II sommatoria

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} = \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^h b^{n+1-h}$$

quindi

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1}a^h b^{n+1-h} + \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^h b^{n+1-h}$$

$$= \binom{n}{n}a^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1}a^h b^{n+1-h} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h}a^h b^{n+1-h}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1}a^h b^{n+1-h} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h}a^h b^{n+1-h}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{h=1}^{n} \left[ \binom{n}{h-1} + \binom{n}{h} \right] a^{h} b^{n+1-h}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{h=1}^{n} \binom{n+1}{h} a^{h} b^{n+1-h}$$

$$= \sum_{h=0}^{n+1} \binom{n+1}{h} a^{h} b^{n+1-h} \qquad \blacksquare$$

Può aiutare vederlo senza sommatorie

$$(a+b)^{n} = \binom{n}{0} b^{n} + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} a^{n}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot \left[ \binom{n}{0} b^{n} + \binom{n}{1} a b + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^{n} \right]$$

$$= \binom{n}{0} b^{n} a + \binom{n}{1} b^{n-1} a^{2} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n} b + a^{n+1}$$

$$+ b^{n+1} + \binom{n}{1} a b^{n} + \binom{n}{2} b^{n-2} a^{2} + \dots + \binom{n}{n} a^{n} b$$

[ho messo in colonna i termini con la stessa parte letterale]

ora li sommo

$$= b^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] b^n a + \dots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] a^n b + a^{n+1}$$

$$= b^{n+1} + \binom{n+1}{1} b^n a + \dots + \binom{n+1}{n} a^n b + a^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} b^{n+1} a^0 + \dots + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0$$

<u>Esercizio</u>: scrivere $(a+b+c)^n$.