II ESONERO: Es 1[pt 25]; **Es 2**[pt 35]; **Es 3**[pt 20]; **Es 4**[pt 10]; **Es 5**[pt 10]

Pre-APPELLO: Es 1[pt 25]; **Es 6**[pt 35]; **Es 3**[pt 20]; **Es 7**[pt 10]; **Es 5**[pt 10]

Es 1 Discutere al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{|\log x^2|^\alpha}\,dx$.

Es 2 Discutere al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\exp(x^\alpha)}{(x^x-1)^\alpha}\,dx$.

Es 3 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$ con $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x} - \big(e^x - 1\big)^2$ e $g(x) = 1 - \cos x^2$.

Es 4 Calcolare la derivata di ordine 20 in $x = 0$ della funzione $f(x) = (1 + x^2)^{10} + \cosh x^5$.

Es 5 Discutere l'uniforme continuità della funzione $x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ sugli insiemi: $E_1 = (0, 1]$, $E_2 = \mathbb{Q}^c \cap (-10, 1)$, $E_3 = [1, +\infty)$.

Es 6 Discutere al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{nx}{nx^2+1}\Big)^n \frac{1}{\log\big(\log(5+n)\big)}$.

Es 7 Sia $a_n = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}(-1)^{k+1}$. Discutere il massimo/minimo limite di $\operatorname{sen} a_n$.

Soluzioni

Es 1 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{|\log x^2|^\alpha}\,dx \approx \int_0^1 \frac{1}{|\log x|^\alpha}\,dx = \int_1^\infty \frac{dt}{(\log t)^\alpha\, t^2}$. $\forall\alpha$, $(\log t)^{-\alpha} \le \sqrt{t}$ per t grandi e dunque l'integrale converge, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (per confronto con $1/t^{3/2}$) sull'intervallo $(2, +\infty)$. Sull'intervallo $(1, 2)$, si ha $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{(\log t)^\alpha\, t^2} \approx \int_1^2 \frac{dt}{(\log t)^\alpha} = \int_0^1 \frac{dy}{(\log(1+y))^\alpha} \approx \int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha} < +\infty$ se e solo se $\alpha < 1$. In conclusione l'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$.

Es 2 Spezziamo l'integrale tra 1 e 2 e tra 2 e $+\infty$.

$\displaystyle\int_1^2 \frac{\exp(x^\alpha)}{(x^x-1)^\alpha} \approx \int_1^2 \frac{1}{(x^x-1)^\alpha} = \int_1^2 \frac{1}{\big(e^{x\log x}-1\big)^\alpha} \approx \int_1^2 \frac{1}{(\log x)^\alpha} \approx \int_0^{\log 2} \frac{1}{t^\alpha} < +\infty \iff \alpha < 1.$

$\displaystyle\int_2^\infty \frac{\exp(x^\alpha)}{(x^x-1)^\alpha} \approx \int_2^\infty \frac{\exp(x^\alpha)}{x^{\alpha x}} = \int_2^\infty e^{-\beta(x)}$ con $\beta(x) = \alpha x \log x - x^\alpha$. Se $\alpha \le 0$ o $\alpha > 1$, per x grandi $\beta \le 0$ e quindi $e^{-\beta} \ge 1$ e l'integrale diverge per confronto; se $0 < \alpha \le 1$, $\beta(x) \ge x$ definitivamente per x grandi, e quindi $e^{-\beta(x)} \le e^{-x}$ definitivamente e l'integrale converge per confronto. In conclusione, l'integrale converge se e solo se $0 < \alpha < 1$.

Es 3. $g(x) = 1 - (1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)) = \frac{x^4}{2} + O(x^8)$. $\frac{x^2}{1-x} = x^2(1 + x + x^2 + O(x^3)) = x^2 + x^3 + x^4 + O(x^5)$.
$(e^x - 1)^2 = e^{2x} + 1 - 2e^x = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + O(x^5)$. Quindi $f(x) = \frac{5}{12}x^4 + O(x^5)$ e $\lim_{x\to 0} f/g = \frac{5}{6}$.

Es 4 Dal binomio di Newton segue che $(1 + x^2)^{10} = x^{20} + P(x)$ con $P(x)$ polinomio di grado 18 per cui $D^{20}(1 + x^2)^{10} = 20!$. $\cosh x^5 = 1 + \frac{x^{10}}{2} + \frac{x^{20}}{24} + O(x^{30})$, per cui $D^{20}(\cosh x^5)(0) = \frac{20!}{24}$, quindi $f^{(20)}(0) = \frac{25}{24}\cdot 20!$.

Es 5 La funzione $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ ha limite 0 per $x \to 0$ ed è quindi uniformemente continua su $[-M, M]$ per ogni M (per Heine–Cantor). Inoltre $f' = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ che è limitata su $\mathbb{R}$ e quindi (per Lagrange) segue che f è Lipschitziana su $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e quindi uniformemente continua su $\mathbb{R}$ (e su qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}$).

Es 6 Sia $a_n = \big(\frac{nx}{nx^2+1}\big)^n \frac{1}{\log(\log(5+n))}$, Se $x = 0$, $a_n = 0$ e la serie è identicamente nulla. Se $x \ne 0$, $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1/|x|$. Quindi, per il criterio della radice, la serie converge assolutamente se $|x| > 1$ e non converge per $0 < |x| < 1$. Per $x = 1$, $a_n = 1/(e_n \log(\log(5+n))$ con $e_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ e la serie diverge (ad esempio, per confronto con $1/n$. Se $x = -1$, $a_n = (-1)^n(e_n \log(\log(5 + n))$ e poichè $(e_n \log(\log(5+n))$ è crescente (essendo crescenti sia e_n che $\log(\log(5+n)))$, $1/e_n \log(\log(5+n))$ è decrescente e la serie converge per Leibnitz. In conclusione la serie converge assolutamente su $\{|x| > 1\} \cup \{0\}$, converge condizionatamente in $x = -1$ e non converge altrimenti.

Es 7 I termini della somma che definisce a_n sono pari se n è pari e dispari se n è dispari, quindi $a_{2n} = 0$ e $a_{2n+1} = \pi/2$, per cui $\limsup \operatorname{sen} a_n = \lim \operatorname{sen} a_{2n+1} = 1$ e $\liminf \operatorname{sen} a_n = \lim \operatorname{sen} a_{2n} = 0$.