

Es 1 Discutere al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{|\log x^2|^\alpha} dx$.

Es 2 Discutere al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio $\int_1^\infty \frac{\exp(x^\alpha)}{(x^x - 1)^\alpha} dx$.

Es 3 Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x)$ con $f(x) = \frac{x^2}{1-x} - (e^x - 1)^2$ e $g(x) = 1 - \cos x^2$.

Es 4 Calcolare la derivata di ordine 20 in $x = 0$ della funzione $f(x) = (1 + x^2)^{10} + \cosh x^5$.

Es 5 Discutere l'uniforme continuità della funzione $x^2 \sin(1/x)$ sugli insiemi: $E_1 = (0, 1]$, $E_2 = \mathbb{Q}^c \cap (-10, 1)$, $E_3 = [1, +\infty)$.

Es 6 Discutere al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{nx}{nx^2 + 1}\right)^n \frac{1}{\log(\log(5+n))}$.

Es 7 Sia $a_n = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n^2} (-1)^{k+1}$. Discutere il massimo/minimo limite di $\sin a_n$.

Soluzioni

Es 1 $\int_0^1 \frac{1}{|\log x^2|^\alpha} dx \approx \int_0^1 \frac{1}{|\log x|^\alpha} dx = \int_1^\infty \frac{dt}{(\log t)^\alpha t^2}$. $\forall \alpha$, $(\log t)^{-\alpha} \leq \sqrt{t}$ per t grandi e dunque l'integrale converge, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (per confronto con $1/t^{3/2}$) sull'intervallo $(2, +\infty)$. Sull'intervallo $(1, 2)$, si ha

$$\int_1^2 \frac{dt}{(\log t)^\alpha t^2} \approx \int_1^2 \frac{dt}{(\log t)^\alpha} = \int_0^1 \frac{dy}{(\log(1+y))^\alpha} \approx \int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha} < +\infty \text{ se e solo se } \alpha < 1. \text{ In conclusione l'integrale converge se e solo se } \alpha < 1.$$

Es 2 Spezziamo l'integrale tra 1 e 2 e tra 2 e $+\infty$.

$$\int_1^2 \frac{\exp(x^\alpha)}{(x^x - 1)^\alpha} \approx \int_1^2 \frac{1}{(x^x - 1)^\alpha} = \int_1^2 \frac{1}{(e^{x \log x} - 1)^\alpha} \approx \int_1^2 \frac{1}{(\log x)^\alpha} = \int_0^{\log 2} \frac{1}{t^\alpha} < +\infty \iff \alpha < 1.$$

$\int_2^\infty \frac{\exp(x^\alpha)}{(x^x - 1)^\alpha} \approx \int_2^\infty \frac{\exp(x^\alpha)}{x^{\alpha x}} = \int_2^\infty e^{-\beta(x)}$ con $\beta(x) = \alpha x \log x - x^\alpha$. Se $\alpha \leq 0$ o $\alpha > 1$, per x grandi $\beta \leq 0$ e quindi $e^{-\beta} \geq 1$ e l'integrale diverge per confronto; se $0 < \alpha \leq 1$, $\beta(x) \geq x$ definitivamente per x grandi, e quindi $e^{-\beta(x)} \leq e^{-x}$ definitivamente e l'integrale converge per confronto. In conclusione, l'integrale converge se e solo se $0 < \alpha < 1$.

Es 3. $g(x) = 1 - (1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)) = \frac{x^4}{2} + O(x^8)$. $\frac{x^2}{1-x} = x^2(1 + x + x^2 + O(x^3)) = x^2 + x^3 + x^4 + O(x^5)$. $(e^x - 1)^2 = e^{2x} + 1 - 2e^x = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + O(x^5)$. Quindi $f(x) = \frac{5}{12}x^4 + O(x^5)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f/g = \frac{5}{6}$.

Es 4 Dal binomio di Newton segue che $(1 + x^2)^{10} = x^{20} + P(x)$ con $P(x)$ polinomio di grado 18 per cui $D^{20}(1 + x^2)^{10} = 20!$. $\cosh x^5 = 1 + \frac{x^{10}}{2} + \frac{x^{20}}{24} + O(x^{30})$, per cui $D^{20}(\cosh x^5)(0) = \frac{20!}{24}$, quindi $f^{(20)}(0) = \frac{25}{24} \cdot 20!$.

Es 5 La funzione $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ ha limite 0 per $x \rightarrow 0$ ed è quindi uniformemente continua su $[-M, M]$ per ogni M (per Heine-Cantor). Inoltre $f' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ che è limitata su \mathbb{R} e quindi (per Lagrange) segue che f è Lipschitziana su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e quindi uniformemente continua su \mathbb{R} (e su qualunque sottoinsieme di \mathbb{R}).

Es 6 Sia $a_n = \left(\frac{nx}{nx^2+1}\right)^n \frac{1}{\log(\log(5+n))}$. Se $x = 0$, $a_n = 0$ e la serie è identicamente nulla. Se $x \neq 0$, $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1/|x|$. Quindi, per il criterio della radice, la serie converge assolutamente se $|x| > 1$ e non converge per $0 < |x| < 1$. Per $x = 1$, $a_n = 1/(e_n \log(\log(5+n)))$ con $e_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ e la serie diverge (ad esempio, per confronto con $1/n$). Se $x = -1$, $a_n = (-1)^n (e_n \log(\log(5+n)))$ e poichè $(e_n \log(\log(5+n)))$ è crescente (essendo crescenti sia e_n che $\log(\log(5+n))$), $1/e_n \log(\log(5+n))$ è decrescente e la serie converge per Leibnitz. In conclusione la serie converge assolutamente su $\{|x| > 1\} \cup \{0\}$, converge condizionatamente in $x = -1$ e non converge altrimenti.

Es 7 I termini della somma che definisce a_n sono pari se n è pari e dispari se n è dispari, quindi $a_{2n} = 0$ e $a_{2n+1} = \pi/2$, per cui $\limsup \sin a_n = \lim \sin a_{2n+1} = 1$ e $\liminf \sin a_n = \lim \sin a_{2n} = 0$.