1 L'integrale di Riemann su $\mathbb{R}$

Osservazione 1.1 (i) D'ora in avanti *considereremo l'insieme vuoto un intervallo (limitato).*

(i) Si ricorda che *l'intersezione di due intervalli è un intervallo e che l'unione di due intervalli è un intervallo (se l'intersezione è non vuota o uno dei due intervalli è l'insieme vuoto) o l'unione disgiunta di due intervalli.*

(iii) *Il complementare di un intervallo è un intervallo o unione di due intervalli disgiunti.*

(iv) *Se I e J sono intervalli disgiunti non vuoti allora o $I \le J$ o $J \le I$.*

Dimostrazione* Basta far vedere che se $x \in I$ e $y \in J$ con $x < y$ allora $I \le J$. Siano $\alpha = \sup I \le y$ e $\beta = \inf J \ge x$. La tesi equivale a mostrare che $\alpha \le \beta$. Supponiamo (per assurdo) che $\beta < \alpha$. Se $x > \beta$, allora $\beta < x < y$, il che implica (essendo J un intervallo) che $x \in J$, il che contraddice che $I \cap J = \varnothing$. Supponiamo allora che $x \le \beta$ e siano $y_n \in J$ tali che $y_n \to \beta$. Poiché $\beta < \alpha$, esiste m tale che $x \le \beta \le y_m < \alpha$, il che implica (essendo I un intervallo) che $y_m \in I$, il che di nuovo contraddice che I e J sono disgiunti. ∎

1.1 Insiemi elementari

Definizione 1.2 *Un insieme elementare $E \subseteq \mathbb{R}$ è una unione finita di intervalli limitati disgiunti*[1]*. La famiglia degli insiemi elementari si denota $\mathcal{E} := \mathcal{E}(\mathbb{R})$; in generale, $\mathcal{E}(I)$ con I intervallo di $\mathbb{R}$ denota la famiglia degli insiemi elementari contenuti in I.*

Lemma 1.3 *Sia $E = \bigcup_{1 \le k \le n} I_k$ con I_k intervalli. Allora esistono $m \le n$ intervalli I'_k disgiunti tali che $E = \bigcup_{1 \le k \le m} I'_k$; in particolare se gli I_k sono limitati $E \in \mathcal{E}$.*

Dimostrazione* Per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 1$ la tesi è vera con $m = n = 1$ e $I'_1 = I_1$. Assumiamo la tesi vera per $n \in \mathbb{N}$ e dimostriamola per $n+1$. Se $I_{n+1} \cap I_k = \varnothing$ per ogni $1 \le k \le n$ la tesi segue direttamente dall'ipotesi induttiva (con $m \le n+1$). Se esiste $j \le n$ tale che $I_{n+1} \cap I_j \ne \varnothing$, allora $\tilde{I}_j := I_j \cup I_{n+1}$ è un intervallo e la tesi segue dall'ipotesi induttiva applicata agli n intervalli I_k per $k \ne j$ e $\tilde{I}_j$ (in questo caso si avrà $m \le n$). ∎

Notazione Se $E = \cup A_j$ con A_j disgiunti ($A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \ne j$) scriveremo $E = \dot\cup A_j$.

Proposizione 1.4 *Se $A, B \in \mathcal{E}(I)$, allora $A \cap B$, $A \cup B$, e $A \backslash B$ appartengono a $\mathcal{E}(I)$.*

Dimostrazione* Per ipotesi $A = \dot\cup I_j$ e $B = \dot\cup J_k$ con $1 \le j \le n$ e $1 \le k \le m$ e I_j e J_k intervalli contenuti in I.

$A \cap B = \bigcup_{j,k} I_j \cap J_k$ e poiché gli intervalli $I_j \cap J_k \subseteq I$ sono disgiunti tra loro (per coppie di indici (j,k) diverse), segue che l'unione è disgiunta e quindi $A \cap B \in \mathcal{E}(I)$.

$A \cup B = \bigcup_{j,k} I_j \cup J_k$ e quindi, per il Lemma 1.3, $A \cup B \in \mathcal{E}(I)$.

$$A \backslash B = (\cup_j I_j) \cap (\cup_k J_k)^c = (\cup_j I_j) \cap (\cap_k J_k^c) = \cup_j \big(I_j \cap (\cap_k J_k^c)\big)$$

Per l'Osservazione 1.1 gli insiemi $I_j \cap (\cap_k J_k^c)$ sono unione di intervalli (in I) e quindi $A \backslash B \in \mathcal{E}$ per il Lemma 1.3. ∎

[1] Ossia, $E = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ con I_j intervalli limitati tali che $I_j \cap I_k = \varnothing$ se $j \ne k$.

1.2 Misura di insiemi elementari

Cominciamo col definire la misura (o lunghezza) di un intervallo:

Definizione 1.5 *Sia I un intervallo. Chiamiamo lunghezza o misura (unidimensionale) I l'elemento di $\mathbb{R}^*$ dato da*

$$|I| := \begin{cases} 0\,, & \text{se } I = \varnothing\,; \\ +\infty\,, & \text{se } I \text{ non è limitato}\,; \\ \sup I - \inf I\,, & \text{se } \varnothing \neq I \text{ è limitato}\,. \end{cases} \tag{1}$$

A volte si usano i simboli $\ell(I)$ o $\mathrm{mis}_1(I)$ al posto di $|I|$.

Osservazione 1.6 (i) La lunghezza di un punto (o meglio di un singleton $I = \{a\} = [a, a]$) è zero.

(ii) Si noti anche che la definizione di lunghezza non dipende dal fatto che gli estremi appartengano o meno all'intervallo.

Lemma 1.7 *Sia I un intervallo limitato, $n \geq 2$ e $I_1, ..., I_n$ intervalli tali che $I = \dot{\cup} I_k$. Allora*

$$|I| = \sum_{k=1}^{n} |I_k|\,. \tag{2}$$

Dimostrazione Poiché gli intervalli I_k sono disgiunti, per il punto (iv) dell'Osservazione 1.1 possiamo assumere che $I_1 \leq \cdots \leq I_n$. Siano $a_k = \inf I_k \leq b_k = \sup I_k$ per ogni $1 \leq k \leq n$, $a = \inf I = a_1$ e $b = \sup I = b_n$. Poniamo anche $a_{n+1} := b_n = b$. Poichè $I = \dot{\cup} I_k$ (e I è un intervallo), si deve avere $a_{k+1} = b_k$ per ogni $1 \leq k \leq n$ e quindi

$$|I| = b - a = a_{n+1} - a_1 = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n} |I_k|\,. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.8 *Siano I_j e J_k intervalli limitati con $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq m$ tali che $E = \dot{\cup} I_j = \dot{\cup} J_k$. Allora $\sum |I_j| = \sum |J_k|$.*

Dimostrazione Dalle ipotesi segue che per ogni j e k si ha $I_j = \dot{\cup}_k (I_j \cap J_k)$ e $J_k = \dot{\cup}_j (J_k \cap I_j)$ e quindi, per il Lemma 1.7 si ha che $|I_j| = \sum_k |I_j \cap J_k|$ e $|J_k| = \sum_j |J_k \cap I_j|$. Quindi,

$$\sum_j |I_j| = \sum_j \sum_k |I_j \cap J_k| = \sum_k \sum_j |I_j \cap J_k| = \sum_k |J_k|\,. \quad \blacksquare$$

Questo lemma permette di dare la definizione di misura di un insieme elementare:

Definizione 1.9 *Sia $E \in \mathcal{E}$. Allora $|E| := \mathrm{mis}_1(E) := \sum |I_k|$ dove $E = \dot{\cup} I_k$ $(1 \leq k \leq n)$.*

Si noti che il numero $|E|$ per il Lemma 1.8 dipende solo dall'insieme elementare E e *non* dal particolare modo in cui vene rappresentato come unione disgiunta di intervalli.