1.3 Funzioni a scalini

Definizione 1.10 *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ a scalini è una combinazione lineare di funzioni caratteristiche*[2] *di intervalli in I limitati e disgiunti, ossia,*

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j}\,, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}\,,\ I_j \ \textit{intervallo limitato}\,,\ I_j \subseteq I\,,\ I_j \cap I_k = \varnothing\,,\ \forall j \neq k\,; \tag{3}$$

l'insieme di tali funzioni si denota $S(I)$ e porremo $S := S(\mathbb{R})$.
Diremo che (3) è una 'rappresentazione standard' di $f \in S(I)$.

Osservazione 1.11 (i) Ovviamente, la rappresentazione standard di una funzione a scalini non è unica ad esempio:

$$\chi_{[0,1]} = 2\chi_{[0,1/2)} - \chi_{[0,1]} + 2\chi_{[1/2,1]}\,.$$

(ii) Se $f \in S(I)$ è come in (3), $E := \dot{\cup} I_j \in \mathscr{E}(I)$ e $f(x) = 0$ se $x \notin E$. In particolare le funzioni a scalini sono *funzioni a supporto compatto*[3].

Nel resto di questo capitolo, I denota un intervallo fissato in $\mathbb{R}$ (ad esempio $I = \mathbb{R}$).

Lemma 1.12 *Se $f, g \in S(I)$, esistono intervalli disgiunti e limitati $I_i \subseteq I$, $1 \leq i \leq n$, e numeri reali α_i e β_i tali che*

$$f = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_i \chi_{I_i}\,, \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{I_i}\,, \tag{4}$$

Il punto di questo lemma è che gli intervalli relativi alle funzioni f e g possono essere presi *gli stessi per entrambe le funzioni.*
Dimostrazione** Essendo $f, g \in S(I)$, si ha (in una rappresentazione standard)

$$f = \sum_{j=1}^{p} \alpha'_j \chi_{I'_j}\,, \qquad g = \sum_{k=1}^{q} \alpha''_k \chi_{I''_k}\,.$$

con $I'_j, I''_k \subseteq I$. Consideriamo l'insieme delle coppie di indici $F := \{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \big| \, j \leq p\,,\ k \leq q\}$ e suddividiamolo in due sottoinsiemi disgiunti ponendo[4]

$$F_0 := \{(j,k) \in F \big| \, I'_j \cap I''_k = \varnothing\}\,, \qquad F_1 := \{(j,k) \in F \big| \, I'_j \cap I''_k \neq \varnothing\}\,.$$

Ad ogni coppia $(j,k) \in F_0$ associamo i due intervalli disgiunti I'_j e I''_k e chiamiamo $\mathscr{F}_0$ la famiglia di tali intervalli al variare di $(j,k) \in F_0$. Per ogni coppia $(j,k) \in F_1$ l'insieme elementare $I'_j \cup I''_k$ è dato dall'unione disgiunta di $I'_j \cap I''_k$ ($\neq \varnothing$) e di due altri intervalli (possibilmente vuoti) che chiamiamo J^1_{jk} e J^2_{jk} che possono essere sottoinsiemi di $I'_j \backslash I''_k$ o di[5] $I''_k \backslash I'_j$; chiamiamo $\mathscr{F}_1$ la famiglia di tali intervalli al variare di $(j,k) \in F_1$. Si noti che la famiglia $\mathscr{F} := \mathscr{F}_0 \dot{\cup} \mathscr{F}_1$ è una famiglia di intervalli contenuti in I e a due a due disgiunti. Chiamiamo I_i con $1 \leq i \leq n$ gli intervalli di $\mathscr{F}$. Allora vale la (4) con le seguenti definizioni di α_i e β_i: se $I_i \in \mathscr{F}_0$ e $I_i = I'_j$, allora $\alpha_i = \alpha'_j$ e $\beta_i = 0$, se $I_i = I''_k$, allora $\alpha_i = 0$ e $\beta_i = \alpha''_k$. Se $I_i \in \mathscr{F}_1$ e $I_i = I'_j \cap I''_k$, allora allora $\alpha_i = \alpha'_j$ e $\beta_i = \alpha''_k$; se $I_i = J^\ell_{jk} \subseteq I'_j \backslash I''_k$, allora allora $\alpha_i = \alpha'_j$ e $\beta_i = 0$; se $I_i = J^\ell_{jk} \subseteq I''_k \backslash I'_j$, allora $\alpha_i = 0$ e $\beta_i = \alpha''_k$. ∎

Da questo lemma segue immediatamente la seguente

---

[2] Si ricorda che la funzione caratteristica (o indicatrice) di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è la funzione $x \to \chi_A(x)$ definita come $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$; in particolare $\chi_\varnothing$ è la funzione identicamente nulla.

[3] Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il *supporto di f*, denotato $\mathrm{supp}(f)$ è la chiusura dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} \big| \, f(x) \neq 0\}$.

[4] Chiaramente $F = F_0 \dot{\cup} F_1$.

[5] Tutti i casi sono possibili.

Proposizione 1.13 *Se $f, g \in S(I)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, allora appartengono a $S(I)$ anche le seguenti funzioni*

$$af + bg\,, \quad fg\,, \quad \max\{f,g\}\,, \quad \min\{f,g\}\,, \quad f^{\pm}\,, \quad |f|\,. \tag{5}$$

Dimostrazione Siano f, g come in (4), allora

$$af + bg = \sum_{j=1}^{n} (a\alpha_j + b\beta_j)\chi_{I_j}\,, \quad fg = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j\beta_j)\chi_{I_j}\,, \quad \max\{f,g\} = \sum_{j=1}^{n} \max\{\alpha_j, \beta_j\}\chi_{I_j}\,,$$
$$\min\{f,g\} = \sum_{j=1}^{n} \min\{\alpha_j, \beta_j\}\chi_{I_j}\,,\,, \quad f^{\pm} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{\pm}\chi_{I_j}\,, \quad |f| = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\chi_{I_j}\,. \quad \blacksquare$$

1.4 Integrale di funzioni a scalini

Lemma 1.14 *Sia $f \in S(I)$ e siano*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \chi_{J_k} = f \tag{6}$$

due sue rappresentazioni standard. Allora,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j |I_j| = \sum_{k=1}^{m} \beta_k |J_k|\,. \tag{7}$$

Dimostrazione* Possiamo assumere che $\alpha_j \neq 0 \neq \beta_k$ per ogni j e k (dato che se sono zero non contribuiscono alla somma in (7)). In tal caso

$$E := \dot\cup_j I_j = \dot\cup_k J_k = \{x \in \mathbb{R} \big| \, f(x) \neq 0\}\,,$$

e la dimostrazione segue, con gli ovvi adattamenti, la falsa riga della dimostrazione del Lemma 1.8. $\blacksquare$

Grazie a tale lemma la seguente definizione è ben posta:

Definizione 1.15 *Se $f \in S(I)$ chiamiamo integrale di f su I il seguente numero reale*

$$\int_I f := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j |I_j|\,, \tag{8}$$

dove $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j}$ è una qualunque rappresentazione standard di f.

Dalla Proposizione 1.13 (e dalla sua dimostrazione) segue immediatamente la seguente

Proposizione 1.16 *L'integrale è un 'funzionale lineare e positivo su $S(I)$', ossia, se $f, g \in S(I)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, allora*

$$\int_I (af + bg) = a\int_I f + b\int_I g \tag{9}$$
$$f \geq 0 \implies \int_I f \geq 0\,. \tag{10}$$

Osservazione 1.17 (i) Da (9) e (10) segue subito che, se $f, g \in S(I)$, allora

$$f \leq g \implies \int_I f \leq \int_I g\,, \qquad \big(f, g \in S(I)\big)\,. \tag{11}$$