1.5 Funzioni Riemann integrabili

In questa sezione I è *un intervallo limitato.*

Definizione 1.18 *$f : I \to \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann (o 'Riemann integrabile') su I se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni $g, h \in S(I)$ tali che*

$$g \le f \le h\,, \qquad \int_I (h - g) < \varepsilon\,, \qquad (g, h \in S(I))\,. \tag{11}$$

L'insieme delle funzioni Riemann integrabili su I si denota $\mathscr{R}(I)$.

Osservazione 1.19 (i) Se $f \in \mathscr{R}(I)$ e se $g, h \in S(E)$ sono tali che $g \le f \le h$, da (10), segue che $\int_I g \le \int_I h$, ossia, $0 \le \int_I (h - g)$.

(ii) $S(I) \subseteq \mathscr{R}(I)$: se $f \in S(I)$ possiamo prendere $g = f = h$.

(iii) *Se $f \in \mathscr{R}(I)$, allora f è limitata* poiché per ogni $x \in I$, $-\infty < \inf g \le f(x) \le \sup g < +\infty$.

(iv) Se $m \le f \le M$ possiamo assumere che le funzioni a scalini in (11) siano tali che $m \le g$ e $h \le M$. Infatti, le funzioni $\max\{g, m\}$ e $\min\{h, M\}$ sono a scalini (Proposizione 1.13) e $g \le \max\{g, m\} \le f \le \min\{h, M\} \le h$ e $\int_I (\min\{h, M\} - \max\{g, m\}) \le \int_I (h - g)$.

Definizione 1.20 *Sia $f \in \mathscr{R}(I)$ e denotiamo*

$$S_f^-(I) := \{g \in S(I) \big| \, g \le f\}\,, \qquad S_f^+(I) := \{h \in S(I) \big| \, h \ge f\}\,. \tag{12}$$

Si definisce l'integrale di Riemann di f il numero reale

$$\int_I f := \sup_{g \in S_f^-(I)} \int_I g = \inf_{h \in S_f^+(I)} \int_I h\,. \tag{13}$$

Osservazione 1.21 Sia $f \in \mathscr{R}(I)$ e denotiamo con $\mathscr{I}_I^\pm(f) = \left\{\int_I g \big| \, g \in S_f^\pm(I)\right\}$. Per l'Osservazione 1.19–(i), $\mathscr{I}_I^-(f) \le \mathscr{I}_I^+(f)$ e per (11) tali insiemi sono contigui e l'elemento separatore è, per definizione, l'integrale di Riemann di f.

Dalla definizione segue subito la seguente caratterizzazione di integrabilità:

Proposizione 1.22 (Critertio di integrabilità per successioni)
$f \in \mathscr{R}(I)$ se e solo per ogni $n \in \mathbb{N}$, esistono, $g_n \in S_f^-(I)$ e $h_n \in S_f^+(I)$ tali che $\int_I (h_n - g_n) \to 0$ ed in tal caso $\int_I f = \lim \int_I h_n = \lim \int_I g_n$.

Dimostrazione Sia $f \in \mathscr{R}(I)$. Se $\varepsilon = 1/n$, da (11) segue che esistono $g_n \in S_f^-(I)$ e $h_n \in S_f^+(I)$ tali che $0 \le \int_I (h_n - g_n) < 1/n$, e dalla definizione di sup e inf e da (13) segue che $\int_I f = \lim \int_I h_n = \lim \int_I g_n$.
Viceversa, dato $\varepsilon > 0$ sia N tale che $\int_I (h_n - g_n) < \varepsilon$ per ogni $n \ge N$ con $g_n \le f \le h_n$ e $g_n, h_n \in S(I)$. Allora vale vale la (11) con $g = g_N$ e $h = h_N$. ∎

Osservazione 1.23 *Le successioni di funzioni $\{g_n\}$ e $\{h_n\}$ possono essere prese rispettivamente crescenti (ossia $g_n(x) \le g_{n+1}(x)$ per ogni $x \in I$) e decrescenti (ossia $h_n(x) \ge h_{n+1}(x)$ per ogni $x \in I$).*
Dimostrazione Se $\tilde{g}_n \in S_f^-$ e $\tilde{h}_n \in S_n^+$ sono tali che $\lim \int_I (\tilde{h}_n - \tilde{g}_n) = 0$, ricordando che il massimo/minimo tra funzioni a scalini è a scalini, possiamo prendere $g_n = \max\{\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_n\}$ e $h_n = \min\{\tilde{h}_1, ..., \tilde{h}_n\}$; infatti $\{g_n(x)\}$ è crescente e $\{h_n(x)\}$ decrescente e quindi $h_n - g_n \le \tilde{h}_n - \tilde{g}_n$ e integrando tale relazione su I si ottiene che $0 \le \int_I (h_n - g_n) \le \int_I (\tilde{h}_n - \tilde{g}_n) \to 0$. ∎

Nel prossimo teorema raccogliamo le proprietà fondamentali dell'integrale secondo Riemann.

Teorema 1.24 (Proprietà dell'integrale di Riemann)
(a) *Se* $f_1, f_2, g \in \mathscr{R}(I)$ *e* $a, b \in \mathbb{R}$, *allora appartengono a* $\mathscr{R}(I)$ *anche le funzioni* $af_1 + bf_2$, $f_1 f_2$, $\max\{f_1, f_2\}$, $\min\{f_1, f_2\}$, $f^{\pm}$ *e* $|f|$.
(b) *L'integrale di Riemann è un funzionale lineare e positivo su* $\mathscr{R}(I)$*:*

$$\int_I (af_1 + bf_2) = a \int_I f_1 + b \int_I f_2 \,, \qquad \forall\ f_1, f_2 \in \mathscr{R}(I)\,, \tag{14}$$

$$\int_I f \geq 0\,, \qquad \forall\ f \in \mathscr{R}(I)\,, f \geq 0\,. \tag{15}$$

(c) *L'integrale di Riemann è additivo: se* $f \in \mathscr{R}(I)$, *per ogni intervallo* $J \subseteq I$, $f \in \mathscr{R}(J)$ *e*

$$\int_J f = \int_I f \chi_{_J} \tag{16}$$

e se $I = I_1 \dot\cup I_2$ *con* I_i *intervalli allora*

$$\int_{I_1} f + \int_{I_2} f = \int_I f\,. \tag{17}$$

Dimostrazione* Useremo sistematicamente la Proposizione 1.13. Dividiamo la dimostrazione di (a) in vari passi.
(i) Siano $g_i, h_i \in S(I)$ come nella relazione analoga a (11) con f_i al posto di f e $\varepsilon/2$ al posto di ε. Allora vale (11) con $g := g_1 + g_2, h := h_1 + h_2 \in S$ e $f := f_1 + f_2$ e quindi $f \in \mathscr{R}(I)$.
(ii) Sia $a > 0$. Se $f \in \mathscr{R}(I)$ e vale la (11) con ε/a al posto di ε, allora vale la (11) con ag, af e ah al posto di g, f e h. Dunque $af \in \mathscr{R}(I)$ per ogni $f \in \mathscr{R}(I)$ e $a > 0$.
(iii) Se vale la (11) allora si ha $-h \leq -f \leq -g$ e $\int_I(-g - (-h)) = \int_I (h - g) < \varepsilon$ ossia $-f \in \mathscr{R}(I)$. Da questa osservazione e da (i) e (ii) segue che $af_1 + bf_2 \in \mathscr{R}(I)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $f_i \in \mathscr{R}(I)$.
(iv) Dimostriamo che $f^{\pm}, |f| \in \mathscr{R}(I)$. Si ricordi che la funzione $x \to x^+$ è crescente e che $x \to x^-$ è decrescente. Dunque se vale (11), allora $g^+ \leq f^+ \leq h^+$ e $h^+ - g^+ \leq (h^+ - g^+) + (g^- - h^-) = h - g$ e quindi $\int_I (h^+ - g^+) < \varepsilon$, e quindi $f^+ \in \mathscr{R}(I)$. Poiché $f^- = (-f)^+$ da (iii) segue che $f^- \in \mathscr{R}(I)$ e che $|f| = f^+ + f^- \in \mathscr{R}(I)$.
(v) Dal punto precedente, segue che $\max\{f_1, f_2\} = (f_1 - f_2)^+ + f_2 \in \mathscr{R}(I)$. Quindi anche $\min\{f_1, f_2\} = -\max\{-f_1, -f_2\} \in \mathscr{R}(I)$.
(vi) Dimostriamo ora che se $f \in \mathscr{R}(I)$ e $f \geq 0$, allora $f^2 \in \mathscr{R}(I)$. Sia $M = \sup f$ e assumiamo (11) con $\varepsilon/(2M)$ al posto di ε. Per l'Osservazione 1.19–(iv), possiamo assumere che $g \geq 0$ e $h \leq M$. Allora, $g^2 \leq f^2 \leq h^2$ e $\int_I (h^2 - g^2) = \int_I (h - g)(h + g) \leq 2M \int_I (h - g) < \varepsilon$ e dunque $f^2 \in \mathscr{R}(I)$.
Da questo segue anche che se $f, g \in \mathscr{R}(I)$ e $f, g \geq 0$ allora $fg = \frac{1}{2}\big((f + g)^2 - f^2 - g^2\big) \in \mathscr{R}(I)$.
Quindi, per qualunque $f \in \mathscr{R}(I)$, $f^2 = (f^+ - f^-)^2 = (f^+)^2 + (f^-)^2 - 2f^+ f^- \in \mathscr{R}(I)$.
Infine, se $f, g \in \mathscr{R}$, $fg = f^+ f^- + g^+ g^- - f^+ g^- - f^- g^+ \in \mathscr{R}(I)$. Questo conclude la dimostrazione di (a).

La (14) segue immediatamente da (a), da (8) e dal fatto che $\int_I f_i = \lim \int_I g_n^{(i)}$ con $g_n^{(i)}$ a scalini. La (15) segue da (9) e dal fatto che $\int_I f = \lim \int_I g_n$ con $0 \leq g_n \leq f$ a scalini (si ricordi l'Osservazione 1.19–(iv)). Questo conclude la dimostrazione di (b).

Dimostriamo (c). Assumiamo (11). Allora[6], $g\chi_{_J}, h\chi_{_J} \in S(J)$ e su J si ha , $g\chi_{_J} = g \leq f \leq h = h\chi_{_J}$, ed inoltre $\int_J (h\chi_{_J} - g\chi_{_J}) = \int_I (h\chi_{_J} - g\chi_{_J}) \leq \int_I (h - g) < \varepsilon$ e dunque $f \in \mathscr{R}(J)$. Inoltre, osservando che $S_f^-(J) = \{g\chi_{_J} \big| g \in S_f^-(I)\}$ segue (16) poiché:

$$\int_J f = \sup_{g \in S_f^-(J)} \int_J g = \sup_{g \in S_f^-(I)} \int_I g\chi_{_J} = \int_I f\chi_{_J}\,.$$

Ora, se $I = I_1 \dot\cup I_2$ si ha che $\chi_{_{I_1}} + \chi_{_{I_2}} = \chi_{_I}$ e dunque, per (16), segue (17):

$$\int_I f = \int_I (f(\chi_{_{I_1}} + \chi_{_{I_2}})) = \int_I (f\chi_{_{I_1}} + f\chi_{_{I_2}}) = \int_I f\chi_{_{I_1}} + \int_I f\chi_{_{I_2}} = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f\,. \qquad \blacksquare$$

[6] Si ricordi che $\chi_{_A}\chi_{_B} = \chi_{_{A\cap B}}$.